



7 класс алгебра



Системы двух линейных уравнений с двумя переменными

Урок № 14 Основные понятия.



Цели:



- Сформировать представление о математической модели **система уравнений**.
- Познакомиться с понятием системы двух линейных уравнений и ее решении.
- Изучить **графический способ решения** систем двух уравнений.
- Вопрос о **количестве решений** системы двух линейных уравнений с двумя переменными.
- Решение более сложных систем двух уравнений с двумя неизвестными.

Вспомним!

Уравнение вида: $ax + b = 0$
называется **линейным уравнением**
с одной переменной (где x – переменная,
 a и b некоторые числа).

Внимание!

x – переменная **входит** в уравнение
обязательно в первой степени.

$$45x - 18 = 0$$

линейное уравнением
с одной переменной

$$3x^2 + 6x + 7 = 0$$

не линейное уравнением
с одной переменной

Вспомним!

Линейное уравнение с двумя переменными

Уравнение вида:

$$ax + by + c = 0$$

называется линейным уравнением с двумя переменными (где x , y - переменные, a , b и c - некоторые числа).

$(x; y)$

Решением уравнения с двумя неизвестными называется пара переменных, при подстановке которых уравнение становится верным числовым равенством.

Вспомним!
Решить линейное уравнение –
это значит найти те значения
переменной, при каждом из которых
уравнение обращается в верное
числовое равенство.

$(x; y) - ?$

Таких решений бесконечно много.

Вспомним!

$$x + y - 3 = 0$$

<i>Реальная ситуация (словесная модель)</i>	<i>Алгебраическая модель</i>	<i>Геометрическая модель</i>
<i>Сумма двух чисел равна 3.</i>	$x + y = 3$ <i>(линейное уравнение с двумя переменными)</i>	<i>прямая m (график линейного уравнения с двумя переменными)</i>

Теорема:

*Графиком любого линейного уравнения
 $ax + by + c = 0$ есть **прямая**.*

*Для построения графика достаточно найти
координаты **двух точек**.*

Вспомним!

**Алгоритм построения графика
уравнения $ax + by + c = 0$**

1. Придать переменной x конкретное значение x_1 ; найти из уравнения $ax + by + c = 0$ соответствующее значение y_1 .
Получим $(x_1; y_1)$.
2. Придать переменной x конкретное значение x_2 ; найти из уравнения $ax + by + c = 0$ соответствующее значение y_2 .
Получим $(x_2; y_2)$.
3. Построим на координатной плоскости точки $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$ и соединим прямой.
4. Прямая – есть график уравнения.

Часто приходится рассматривать математическую модель состоящую из **двух линейных уравнений с двумя переменными**.

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$

$(x; y)$

Решение системы уравнений с двумя неизвестными называется **пара переменных**, при подстановке которых уравнения становятся верными числовыми равенствами.

Решить систему - это значит найти все ее решения или доказать, что их нет.

Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x - y - 3 = 0, \\ x + 2y - 4 = 0. \end{cases}$$

1. Построим график уравнения
 $2x - y - 3 = 0$, $y = 2x - 3$.

x	1	2
y	-1	1

Получим точки:
(1; -1), (2; 1)

2. Построим график уравнения
 $x + 2y - 4 = 0$, $2y = -x + 4$,
 $y = (-x + 4) : 2$.

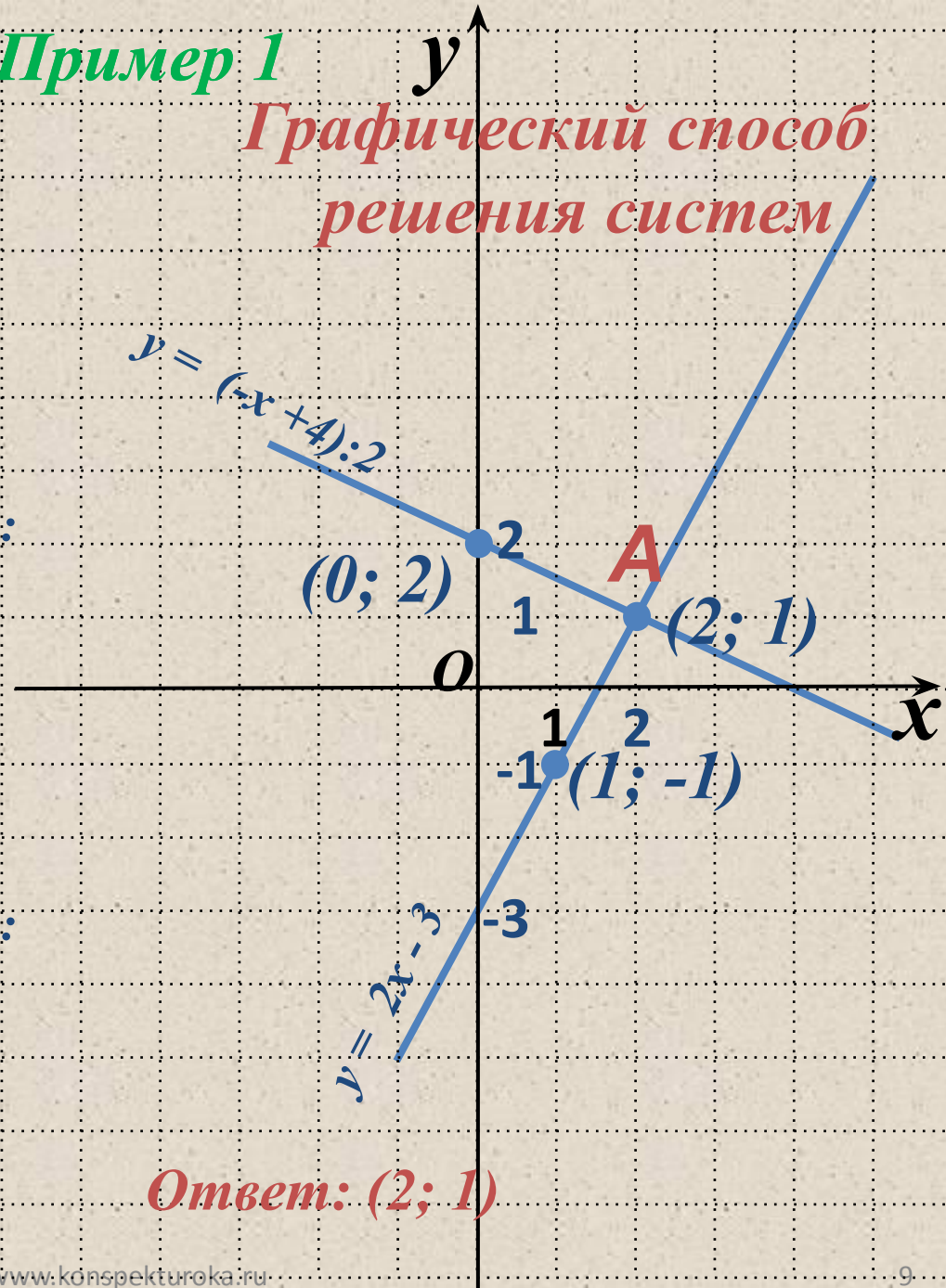
x	0	2
y	2	1

Получим точки:
(0; 2), (2; 1)

3. Прямые пересекаются в
единственной точке **A(2;1)**

Пример 1

**Графический способ
решения систем**



Ответ: (2; 1)

Количество решений двух линейных уравнений с двумя переменными.

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$

1) Если $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$, то прямые пересекаются и система имеет единственное решение.

2) Если $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$, то прямые параллельны и система не имеет решений. Система называется несовместной.

3) Если $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$, то прямые совпадают и система имеет бесконечно много решений. Система называется неопределенной.

Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x + 2y - 5 = 0, \\ 2x + 4y + 3 = 0. \end{cases}$$

1. Построим график уравнения $x + 2y - 5 = 0$, $y = (5 - x) : 2$.

x	1	3
y	2	1

Получим точки:
(1; 2), (3; 1)

2. Построим график уравнения $2x + 4y + 3 = 0$, $4y = -2x - 3$,
 $y = -(2x + 3) : 4$.

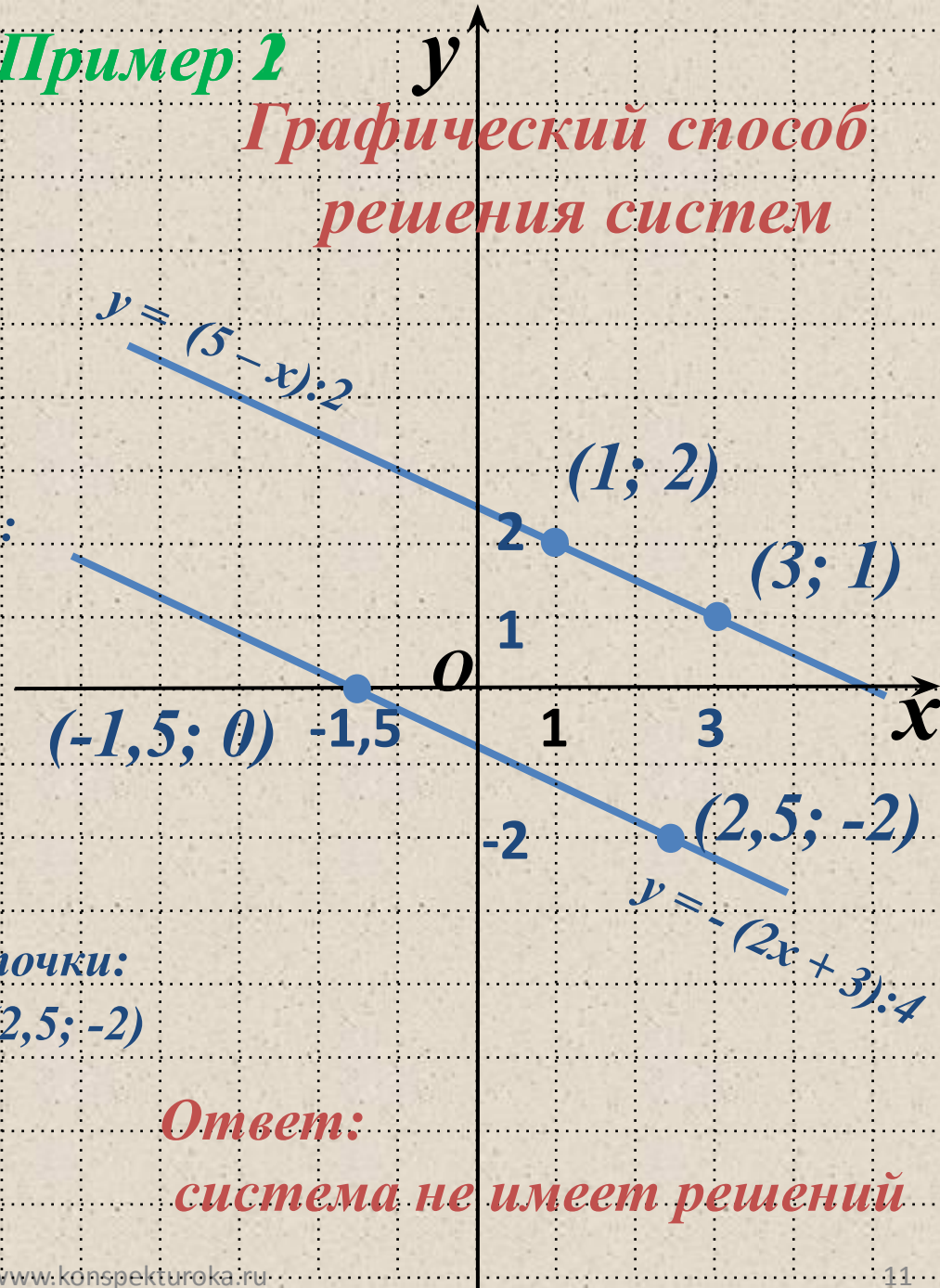
x	-1,5	2,5
y	0	-2

Получим точки:
(-1,5; 0), (2,5; -2)

3. Прямые **параллельны**.

Пример 2

**Графический способ
решения систем**



Ответ:

система не имеет решений

Пример 3

При каких значениях a система уравнений имеет **единственное решение**:

$$\begin{cases} (2a - 1)x + 3y = 7a + 1, \\ (a + 2)x + 2y = 5a - 3. \end{cases}$$

Решение

Условие при которых система уравнений имеет **единственное решение**:

$$\frac{2a - 1}{a + 2} \neq \frac{3}{2},$$

Используем свойство пропорции:

$$2(2a - 1) \neq 3(a + 2),$$

$$4a - 2 \neq 3a + 6$$

$$4a - 3a \neq 2 + 6$$

$$a \neq 8$$

Ответ: при всех значениях a , кроме $a = 8$, данная функция имеет **единственное решение**.

Пример 4

При каких значениях a система уравнений **несовместна**:

$$\begin{cases} (2a - 1)x + 3y = 7a + 1, \\ (2a + 1)x + 5y = 5a - 3. \end{cases}$$

Решение

Условие при которых система уравнений **несовместна**:

$$\frac{2a - 1}{2a + 1} = \frac{3}{5} \neq \frac{7a + 1}{5a - 3}$$

1) Сначала рассмотрим равенство

$$\frac{2a - 1}{2a + 1} = \frac{3}{5}$$

Используем свойство пропорции:

$$5(2a - 1) = 3(2a + 1),$$

$$10a - 5 = 6a + 3$$

$$10a - 6a = 3 + 5$$

$$4a = 8$$

$$a = 2$$

2) Теперь проверим неравенство:

$$\frac{3}{5} \neq \frac{7a + 1}{5a - 3}$$

При подстановке значения $a = 2$ имеем:

$$\frac{3}{5} \neq \frac{7 \cdot 2 + 1}{5 \cdot 2 - 3}$$

$$\frac{3}{5} \neq \frac{15}{7} \quad - \text{ верное неравенство}$$

Ответ: при $a = 2$, данная система **несовместна**.

Пример 5

При каких значениях a система уравнений **неопределенна**:

$$\begin{cases} (2a - 1)x + 3y = 7a + 1, \\ (a + 1)x + 6y = 11a + 5. \end{cases} \quad \text{Укажите решения системы.}$$

Решение

Условие при которых система уравнений **неопределенна**:

$$\frac{2a - 1}{a + 1} = \frac{3}{6} = \frac{7a + 1}{11a + 5}$$

1) Сначала рассмотрим равенство

$$\frac{2a - 1}{a + 1} = \frac{3}{6} \quad \frac{2a - 1}{a + 1} = \frac{1}{2}$$

Используем свойство пропорции:

$$2(2a - 1) = a + 1,$$

$$4a - 2 = a + 1$$

$$4a - a = 1 + 2$$

$$3a = 3$$

$$a = 1$$

2) Теперь проверим равенство:

$$\frac{3}{6} = \frac{7a + 1}{11a + 5}$$

При подстановке значения $a = 1$ имеем:

$$\frac{3}{6} \neq \frac{7 \cdot 1 + 1}{11 \cdot 1 + 5}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad - \text{ верное равенство}$$

Итак при $a = 1$, данная система **неопределенна**.

При подстановке значения $a = 1$ в данную систему имеем:

$$\begin{cases} (2 \cdot 1 - 1)x + 3y = 7 \cdot 1 + 1, \\ (1 + 1)x + 6y = 11 \cdot 1 + 5. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 3y = 8, \\ 2x + 6y = 16. \end{cases}$$
$$\begin{cases} x + 3y = 8, \\ x + 3y = 8. \end{cases}$$

Поделим второе уравнение на 2, имеем:

Ответ: решением системы будет любая пара чисел x и y , в которой $x = 8 - 3y$, а y – произвольное число.

Ответить на вопросы

а) что собой представляют графики обоих уравнений системы?

б) в каком случае система имеет **единственное решение**?

в) какая система является **несовместимой**?

г) о какой системе говорят, что она **неопределенна**?

д) что называется **решением** системы уравнений с двумя переменными?

е) что значит решить систему уравнений?

Спасибо за внимание!

