

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ В ЗАДАНИЯХ ЕГЭ

*Учитель математики ГБОУ гимназии
№1 г. Похвистнево Антонова Г.В.*

1. В чемпионате мира участвуют 16 команд. С помощью жребия их нужно разделить на четыре группы по четыре команды в каждой. В ящике вперемешку лежат карточки с номерами групп: 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4. Капитаны команд тянут по одной карточке. Какова вероятность того, что команда России окажется во второй группе?

Решение: Обозначим через A событие «команда России во второй группе». Тогда количество благоприятных событий $m = 4$ (четыре карточки с номером 2), а общее число равновозможных событий $n = 16$ (16 карточек). Тогда, по определению, вероятность

$$P(A) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4} = 0,25.$$

Ответ: 0,25.

2. В чемпионате мира участвуют 15 команд. С помощью жребия их нужно разделить на пять групп по три команды в каждой. В ящике вперемешку лежат карточки с номерами групп:

1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 5. Капитаны команд тянут по одной карточке. Какова вероятность того, что команда Италии окажется в третьей группе?

Решение: Обозначим через A событие «команда Италии в третьей группе». Тогда количество благоприятных событий $m = 3$ (три карточки с номером 3), а общее число равновозможных событий $n = 15$ (15 карточек). Согласно определению вероятности

$$P(A) = \frac{3}{15} = \frac{1}{5} = 0,2.$$

Ответ: 0,2.

3. Конкурс исполнителей проводится в 4 дня. Всего заявлено 80 выступлений – по одному от каждой страны. В первый день 20 выступлений, остальные распределены поровну между оставшимися днями. Порядок выступлений определяется жеребьёвкой. Какова вероятность, что выступление представителя России состоится в третий день конкурса?

Решение: Общее число случаев (число всех выступлений) $n = 80$. Число благоприятных случаев (число выступлений в третий день) $m = \frac{80-20}{3} = 20$.

Согласно определению вероятности

$$P = \frac{20}{80} = \frac{1}{4} = 0,25.$$

Ответ: 0,25.

4. Научная конференция проводится в 5 дней. Всего запланировано 75 докладов – первые три дня по 17 докладов, остальные распределены поровну между четвёртым и пятым днями. Порядок докладов определяется жеребьёвкой. Какова вероятность того, что доклад профессора М. окажется запланированным

Решение: Общее число случаев (число всех докладов) $n = 75$.

Число благоприятных случаев (число докладов в последний день конференции) $m = \frac{75 - 17 \cdot 3}{2} = 12$.

Согласно определению вероятности

$$P = \frac{12}{75} = \frac{4}{25} = 0,16.$$

Ответ: 0,16.

5. Конкурс исполнителей проводится в 5 дней. Всего заявлено 80 выступлений – по одному от каждой страны. В первый день 8 выступлений, остальные распределены поровну между оставшимися днями. Порядок выступлений определяется жеребьёвкой. Какова вероятность того, что выступление представителя России состоится в третий день конкурса? **Решение:** Общее число случаев (число всех выступлений) $n = 80$. Число благоприятных случаев (число выступлений в третий день конкурса) $m = \frac{80-8}{4} = 18$.

Согласно определению вероятности

$$P = \frac{18}{80} = 0,225.$$

Ответ: 0,225.

6. На чемпионате по прыжкам в воду выступают 50 спортсменов, среди них 5 прыгунов из Испании и 3 прыгуна из Бразилии. Порядок выступлений определяется жребием. Найдите вероятность того, что сорок вторым будет выступать прыгун из Испании.

Решение: Общее число случаев (сорок вторым может выступать любой из прыгунов) $n = 50$. Число благоприятных случаев (число прыгунов из Испании) $m = 5$.

Согласно определению вероятности

$$P = \frac{5}{50} = 0,1.$$

Ответ: 0,1.

7. В классе 21 шестиклассник, среди них два друга – Митя и Петя. Класс случайным образом делят на три группы, по 7 человек в каждой. Найдите вероятность того, что Митя и Петя окажутся в одной и той же группе.

Решение: В каждой группе 7 человек. Будем считать, что Митя уже занял место в одной группе. Обозначим через A событие «Петя оказался в той же группе». Для Пети останется $n = 20$ свободных мест, из них $m = 6$ мест.

Вычисляем вероятность

$$P(A) = \frac{6}{20} = 0,3.$$

Ответ: 0,3.

8. Перед началом первого тура чемпионата по бадминтону участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате участвует 26 бадминтонистов, среди которых 10 участников из России, в том числе Руслан Орлов. Найдите вероятность того, что в первом туре Руслан Орлов будет играть с каким-либо бадминтонистом из России.

Решение: Общее число случаев (число участников, исключая самого Руслана Орлова) $n = 26 - 1 = 25$.

Число благоприятных случаев (число участников из России, исключая самого Руслана Орлова)

$$m = 10 - 1 = 9.$$

По определению вероятности $P = \frac{9}{25} = 0,36$.

Ответ: 0,36.

9. Стрелок стреляет по мишени один раз. В случае промаха стрелок делает второй выстрел по той же мишени. Вероятность попасть в мишень при одном выстреле равна 0,6. Найдите вероятность того, что мишень будет поражена (одним из выстрелов).

Решение: У стрелка есть две возможности: поразить мишень при первом выстреле, либо поразить мишень при втором выстреле (при неудачном первом выстреле). Вероятность поражения мишени при первом выстреле $P_1 = 0,6$. Вероятность того, что первым выстрелом мишень не будет поражена $P_{21} = 1 - 0,6 = 0,4$.

Вероятность поражения мишени при втором выстреле $P_{22} = 0,6$. Согласно теореме умножения вероятностей, вероятность того, что первый выстрел будет неудачным, но мишень будет поражена при втором выстреле $P_2 = P_{21} \cdot P_{22} = 0,4 \cdot 0,6 = 0,24$.

(продолжение решения 6 задачи)

Согласно теореме сложения вероятностей, вероятность того, что мишень будет поражена $P = P_1 + P_2 = 0,6 + 0,24 = 0,84$.

Второй способ решения задачи:

Вероятность поражения при одном выстреле равна $P(A) = 0,6$. Вероятность непопадания $P(\bar{A}) = 1 - 0,6 = 0,4$. Согласно теореме умножения вероятностей вероятность промахнуться равна $P(\bar{A}) \cdot P(\bar{A}) = 0,4 \cdot 0,4 = 0,16$. Тогда вероятность поражения (одним из выстрелов) $P = 1 - 0,16 = 0,84$.

Ответ: 0,84.

10. Две фабрики выпускают одинаковые стёкла для автомобильных фар. Первая фабрика выпускает 25% этих стёкол, вторая – 75%. Первая фабрика выпускает 4% бракованных стёкол, а вторая – 2%. Найдите вероятность того, что случайно купленное в магазине стекло окажется бракованным.

Решение: Если обозначить всё количество стёкол для автомобильных фар за x , то первая фабрика выпускает $0,25x$ стёкол, а вторая – $0,75x$. Количество выпуска бракованных стёкол первой фабрикой равно $0,04 \cdot 0,25x$, второй – $0,02 \cdot 0,75x$. Следовательно, количество всех бракованных стёкол равно $(0,04 \cdot 0,25x + 0,02 \cdot 0,75x) = 0,025x$.

По определению вероятности $P = \frac{0,025x}{x} = 0,025$.

Ответ: 0,025.

11. Два завода выпускают одинаковые автомобильные предохранители. Первый завод выпускает 40% предохранителей, второй – 60%. Первый завод выпускает 4% предохранителей, а второй – 3%. Найдите вероятность того, что случайно выбранный в магазине предохранитель окажется бракованным.

Решение: Если обозначить всё количество предохранителей за x , то первый завод выпускает $0,4x$ предохранителей, а второй – $0,6x$. Количество выпуска бракованных предохранителей первым заводом равно $0,04 \cdot 0,4x$, вторым – $0,03 \cdot 0,6x$. Следовательно, количество всех бракованных стёкол равно $(0,04 \cdot 0,4x + 0,03 \cdot 0,6x) = 0,034x$.

По определению вероятности $P = \frac{0,034x}{x} = 0,034$.

Ответ: 0,034.

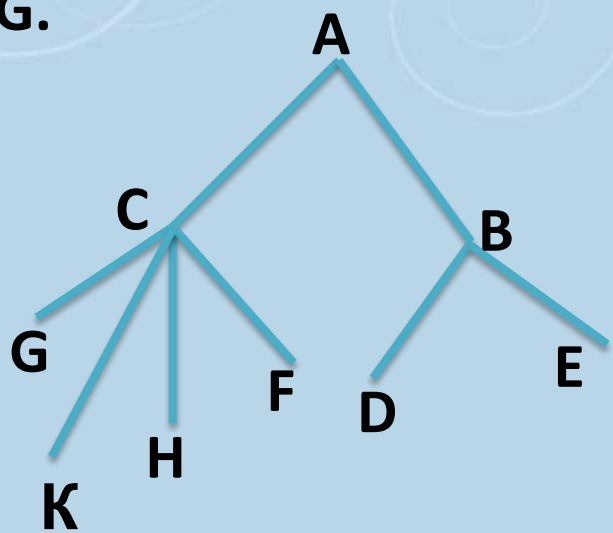
12. На соревнования по метанию ядра приехали 5 спортсменов из Сербии, 7 из Хорватии и 3 из Норвегии. Порядок выступлений определяется жеребьёвкой. Найдите вероятность того, что двенадцатым будет выступать спортсмен из Норвегии

Решение: Общее число случаев (число всех спортсменов) $n = 15$. Число благоприятных случаев (число спортсменов из Норвегии) $m = 3$.

Согласно определению вероятности $P = \frac{3}{15} = 0,2$.

Ответ: 0,2.

13. Павел Иванович совершает прогулку из точки А по дорожкам парка. На каждой развилке он наудачу выбирает следующую дорожку, не возвращаясь обратно. Схема дорожек показана на рисунке. Найдите вероятность того, что Павел Иванович попадёт в точку Г.



Решение: Для того чтобы пенсионер пришёл в точку Г, должны произойти два события: на первой развилке он должен направиться из точки А в точку С (с вероятностью $p_1 = \frac{1}{2}$), на второй развилке – из точки С в точку Г (с вероятностью $p_2 = \frac{1}{4}$).

Тогда, согласно теореме умножения вероятностей, маршрут А-С-Г пенсионер выберет с вероятностью $p = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8} = 0,125$.

Ответ: 0,125.

14. Вася, Петя, Коля и Лёша бросили жребий – кому начинать игру. Найдите вероятность того, что начинать игру должен будет Петя.

Решение: Обозначим через A событие «начинает игру Петя». Тогда количество благоприятствующих исходов $m = 1$, а общее число равновозможных исходов n (начинает игру Петя, начинает игру Вася, начинает игру Коля, начинает игру Лёша).

$$\text{Вероятность } P(A) = \frac{1}{4} = 0,25.$$

Ответ: 0,125.

15. Катя дважды бросает игральный кубик. В сумме у неё выпало 6 очков. Найдите вероятность того, что при одном из бросков выпало 5 очков.

Решение:

Общее число случаев $n = 5$ ((1,5); (5,1); (2,4); (4,2); (3,3)). Число благоприятных случаев (комбинации (1,5); (5,1)) $m = 2$.

Согласно определению вероятности $P = \frac{2}{5} = 0,4$.

Ответ: 0,4.

16. Люда дважды бросает игральный кубик. В сумме у неё выпало 9 очков. Найдите вероятность того, что при первом броске выпало 5 очков.

Решение: Общее число случаев $n = 4$ ((3,6); (4,5); (5,4); (6,3)). Число благоприятных случаев $m = 1$ (комбинация (5,4)).
Согласно определению вероятности $P = \frac{1}{4} = 0,25$.

Ответ: 0,25.

17. Таня и Нина играют в кости. Они бросают кость по одному разу. Выигрывает тот, кто выбросил больше очков. Если очков выпало поровну, то наступает ничья. В сумме выпало 6 очков. Найдите вероятность того, что Таня выиграла.

Решение: Общее число случаев $n = 5$ ((1,5); (2,4); (3,3); (4,2); (5,1)). Число благоприятных случаев $m = 2$ (комбинации (1,5); (2,4) или (4,2); (5,1)).

По определению вероятности $P = \frac{2}{5} = 0,4$.

Ответ: 0,4.

18. Найдите вероятность того, что при бросании двух кубиков на каждом выпадет менее 4 очков.

Решение: Общее число случаев $n = 6 \cdot 6 = 36$. Число благоприятных случаев $m = 3 \cdot 3$. Согласно определению вероятности $P = \frac{9}{36} = 0,25$.

Ответ: 0,25.

19. При двукратном бросании игрального кубика в сумме выпало 6 очков. Найдите вероятность того, что в первый раз выпало меньше 3 очков.

Решение: Общее число случаев $n = 5$ (комбинации (1,5); (5,1); (2,4); (4,2); (3,3)). Число благоприятных случаев (комбинации (1,5); (2,4)) $m = 2$.

Согласно определению вероятности $P = \frac{2}{5} = 0,4$.

Ответ: 0,4.

20. Перед началом футбольного матча судья бросает монету, чтобы определить, какая из команд будет первая владеть мячом. Команда «Меркурий» по очереди играет с командами «Марс», «Юпитер» и «Уран». Найдите вероятность того, что во всех матчах право владеть мячом выиграет команда «Меркурий».

Решение: 1 способ. Обозначим ситуацию, когда в матче первая владеет мячом команда «Меркурий» за «1», обратную ситуацию за «0». Всего будет сыграно 3 матча. Общее число случаев (комбинации 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111) $n = 8$. Число благоприятных случаев (комбинация 100) $m = 1$.

Согласно определению вероятности $P = \frac{1}{8} = 0,125$.

Ответ: 0,125.

2 способ решения:

Обозначим через A событие «команда «Меркурий» начинает игру первой», тогда противоположное событие $\bar{A}$ означает «команда «Меркурий» не начинает игру первой». Из условия задачи следует, что вероятность $P(A) = 0,5$,

тогда $P(\bar{A}) = 1 - 0,5$. Событие C «команда «Меркурий» будет начинать игру во всех матчах» является произведением независимых событий $C = A \cdot A \cdot A$. По [формуле](#) умножения вероятностей независимых событий имеем: $P(C) = 0,5 \cdot 0,5 \cdot 0,5 = 0,125$.

Ответ: 0,125.

21. Перед началом футбольного матча судья бросает монету, чтобы определить, какая из команд будет первая владеть мячом. Команда «Хуторянка» по очереди играет с командами «Радуга», «Дружба», «Заря» и «Воля». Найдите вероятность того, что команда «Хуторянка» будет первой владеть мячом **только в первых двух играх**.
Решение: Пусть событие A «команда «Хуторянка» начинает игру первой», тогда противоположное событие $\bar{A}$ означает «команда «Хуторянка» не начинает игру первой». Из условия задачи следует, что вероятность $P(A) = 0,5$, тогда $P(\bar{A}) = 1 - 0,5$. Событие C «команда «Хуторянка» будет первой владеть мячом только в первых двух играх» является произведением независимых событий $C = A \cdot A \cdot \bar{A} \cdot \bar{A}$. По формуле умножения вероятностей независимых событий имеем: $P(C) = 0,5 \cdot 0,5 \cdot 0,5 \cdot 0,5 = 0,0625$.

Ответ: 0,0625.

22. Перед началом матча по водному поло судья устанавливает мяч в центр бассейна, и от каждой команды к мячу плывёт игрок, чтобы первым завладеть мячом. Вероятность выиграть мяч у игроков равны. Команда «Русалочка» по очереди играет с командами «Наяда», «Ундина» и «Ариэль». Найдите вероятность того, что во втором матче команда «Русалочка» выиграет мяч в начале игры, а в двух других проигрывает.

Решение: Обозначим через A событие «команда «Русалочка» первой завладеет мячом», тогда противоположное событие $\bar{A}$ означает «команда «Русалочка» не завладеет мячом». Из условия задачи следует, что вероятность $P(A) = 0,5$, тогда $P(\bar{A}) = 1 - 0,5$.

Событие $C = A \cdot A \cdot \bar{A}$. По [формуле](#) умножения вероятностей независимых событий имеем:

$$P(C) = 0,5 \cdot 0,5 \cdot 0,5 = 0,125.$$

Ответ: 0,125.

23. В некоторой местности утро в июле может быть либо ясным, либо пасмурным. Наблюдения показали:

1) Если июльское утро ясное, то вероятность дождя в этот день 0,1.

2) Если июльское утро пасмурное, то вероятность дождя в течение дня равна 0,5.

3) Вероятность того, что утро в июле будет пасмурным, равна 0,2.

Найдите вероятность того, что в случайно взятый июльский день дождя не будет.

Решение: 1) Июльское утро может быть либо ясным ($P_{11} = 1 - 0,2 = 0,8$), либо пасмурным (с вероятностью $P_{21} = 0,2$). Согласно теореме умножения вероятностей, вероятность P_1 того, что июльское утро будет ясным и дождя не будет, равна произведению вероятностей $P_{11} = 0,8$ и $P_{12} = 1 - 0,1 = 0,9$ (дождя не будет при ясном утре): $P_1 = P_{11} \cdot P_{12} = 0,8 \cdot 0,9 = 0,72$.

2) Вероятность того, что июльское утро будет пасмурным и дождя не будет, равна произведению вероятностей $P_{21} = 0,2$ (утро будет пасмурным) и $P_{22} = 1 - 0,5 = 0,5$ (дождя не будет при пасмурном утре): $P_2 = P_{21} \cdot P_{22} = 0,2 \cdot 0,5 = 0,1$.

3) Согласно теореме сложения вероятностей, вероятность того, что в случайно взятый июльский день дождя не будет $P = P_1 + P_2 = 0,72 + 0,1 = 0,82$.

Ответ: 0,82.

24. В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Вероятность того, что к концу дня в автомате закончится кофе, равна 0,3. Вероятность того, что кофе закончится в обоих автоматах, равна 0,12. Найдите вероятность того, что к концу дня кофе останется в обоих автоматах.

Решение. Первый способ. Обозначим через A событие «кофе закончится в первом автомате», через B событие «кофе закончится во втором автомате». Событие C «кофе закончится хотя бы в одном автомате» является их суммой $C = A + B$. Из условия задачи известны вероятности

$P(A) = P(B) = 0,3$ и $P(A \cdot B) = 0,12$. По формуле сложения вероятностей имеем:

$$P(C) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B) = 0,3 + 0,3 - 0,12 = 0,48.$$

Значит, вероятность противоположного события

$\bar{C}$ «кофе останется в обоих автоматах» равна $1 - 0,48 = 0,52$.

Решение: Второй способ решения задачи

Вероятность того, что кофе ¹⁶останется в первом автомате, равна $P(\bar{A}) = 1 - 0,3 = 0,7$. Вероятность того, что кофе останется во втором автомате, равна $P(\bar{B}) = 1 - 0,3 = 0,7$.

Вероятность того, что кофе останется в первом или во втором автомате равна $P(\bar{C}) = 1 - 0,12 = 0,88$. Поскольку

$$P(\bar{C}) = P(\bar{A} + \bar{B}) = P(\bar{A}) + P(\bar{B}) - P(\bar{A} \cdot \bar{B}),$$

то имеем: $0,88 = 0,7 + 0,7 - x$, откуда искомая вероятность $x = 0,52$.

Ответ: 0,52.

25. В сборнике билетов по математике всего 20 билетов, в 7 из них встречается вопрос о производной. Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику не встретится вопрос о

Решение: Общее число случаев (всего билетов) $n = 20$. Число благоприятных случаев (количество билетов, в которых не встречается вопрос о производной) $m = 20 - 7 = 13$.

Согласно определению вероятности $P = \frac{13}{20} = 0,65$.

Ответ: 0,65.

26. В классе 7 мальчиков и 14 девочек. 1 сентября случайным образом определяют двух дежурных на 2 сентября, которые должны приготовить класс к занятиям. Найдите вероятность того, что будут дежурить два мальчика.

Решение: Вероятность выбрать первого мальчика-дежурного
($n = 21, m = 7$) $P_1 = \frac{7}{21} = \frac{1}{3}$.

Вероятность выбрать второго мальчика-дежурного
($n = 20, m = 6$) $P_2 = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$.

Вероятность того, что будут дежурить два мальчика, равна
 $P = P_1 \cdot P_2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{10} = 0,1$.

Ответ: 0,1.

27. Валя выбирает случайное трёхзначное число. Найдите вероятность того, что оно делится на 51.

Решение: Общее число случаев (количество всех трёхзначных чисел) $n = 999 - 100 + 1 = 900$. Первое трёхзначное число, которое делится на 51, равно $102 = 51 \cdot 2$. Последнее трёхзначное число, которое делится на 51, равно $969 = 51 \cdot 19$.

Тогда число благоприятных случаев $m = 19 - 2 + 1 = 18$. Согласно определению вероятности

$$P = \frac{18}{900} = 0,02.$$

Ответ:
0,1.

Формула классической вероятности

Вероятность – есть число, характеризующее возможность наступления события.

Определение. Вероятностью P события A называют отношение числа m исходов, благоприятных этому событию, к общему числу n исходов $P(A) = \frac{m}{n}$

Сумма вероятностей всех элементарных событий случайного эксперимента равна 1.



Несовместные события. Формула сложения вероятностей

Определение. События называют несовместными, если они не могут происходить одновременно в одном и том же испытанию

Например, выигрыш, ничейный исход и проигрыш одного игрока в одной партии в шахматы – три несовместных события.

Теорема. Вероятность суммы двух несовместных событий A и B (появление хотя бы одного события) равна сумме вероятностей этих событий: $P(A+B) = P(A) + P(B)$

Теорема (обобщается на любое число попарно несовместных событий) **Следствие.**

Сумма вероятностей противоположных событий

$$A \text{ и } \bar{A} \text{ равна } 1: P(A) + P(\bar{A}) = 1$$



Совместные события. Формула сложения вероятностей (формула для вероятности суммы двух событий в общем случае (не обязательно несовместных))

Определение. События называют совместными, если они могут происходить одновременно. Например, при бросании двух монет выпадение решки на одной не исключает появление решки на другой монете.

Теорема. Вероятность суммы двух совместных событий A и B (появление хотя бы одного события) равна сумме их вероятностей без вероятности их совместного появления, то есть

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$


Независимые события. Формула умножения вероятностей

Определение. Два случайных события называют **независимыми**, если наступление одного из них не изменяет вероятность наступления другого. В противном случае события называют **зависимыми**.

Теорема. Вероятность произведения (совместного появления) двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий: $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$.



Использованная литература:

1. **ЕГЭ-2014: Математика: самое полное издание типовых вариантов заданий/ авт.-сост. И.В.Ященко, И.Р. Высоцкий; под ред. А.Л.Семёнова, И.В.Ященко.- Москва: АСТ: Астрель, 2014.**
2. **А.Г.Корянов , Н.В.Надежкина. Задача В10. ЕГЭ. Математика, 2014. Элементы теории вероятностей (интернет-ресурс <http://alexlarin.net/ege/2014/b102014.html>)**
3. **ЕГЭ: 3000 задач с ответами по математике. Все задания группы В/А.Л.Семёнов, И.В.Ященко и др.; под ред. А.Л.Семёнова, И.В.Ященко. – М.: Издательство «Экзамен», 2014.**
4. **Источник шаблона презентации : <http://pedsovet.su/load/321-1-0-32889>**