

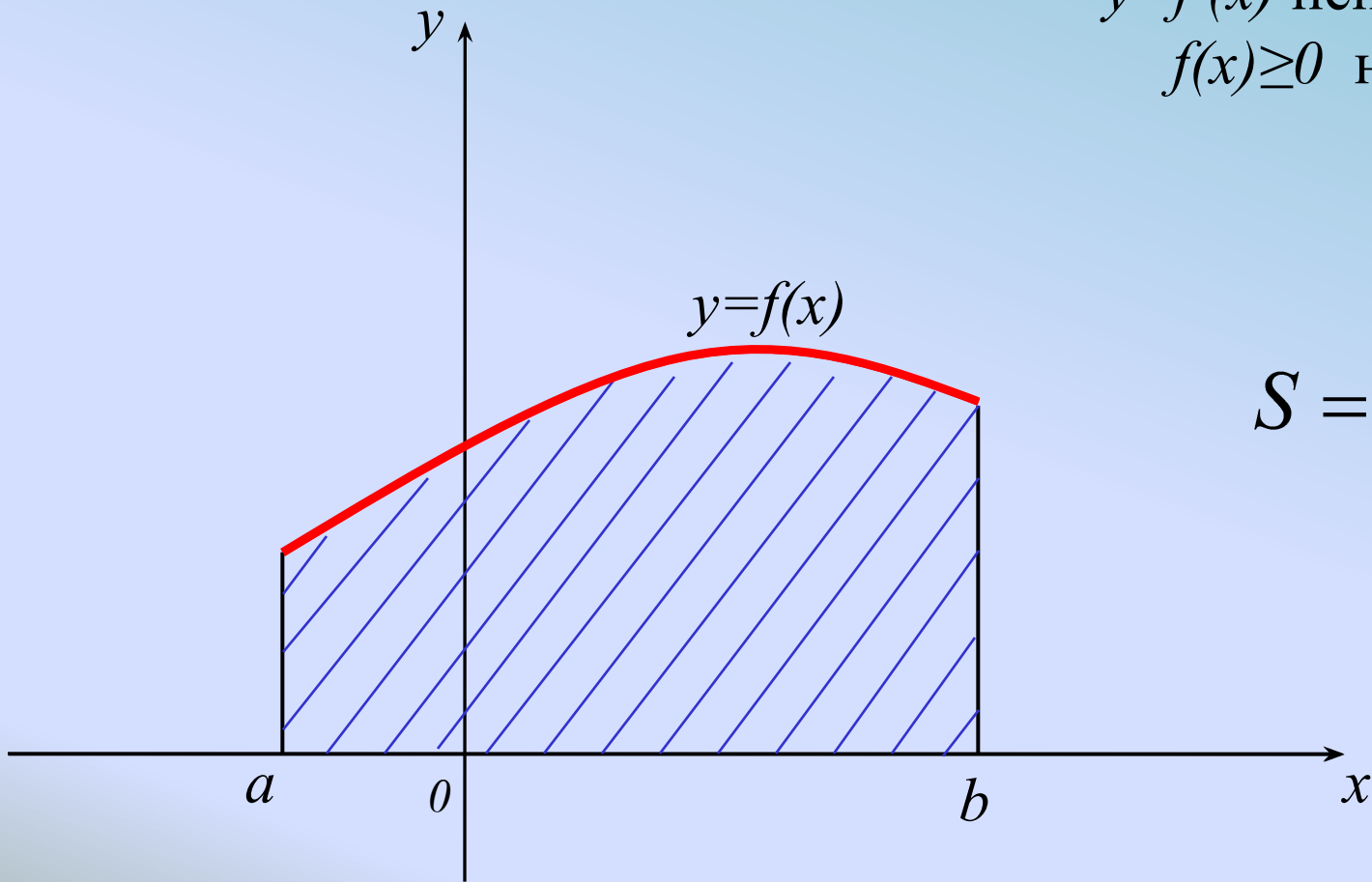
Вычисления площадей плоских фигур



Республика Башкортостан г. Уфа
МАОУ лицей № 155
Ивушкина Л. Д.

Найти площадь фигуры

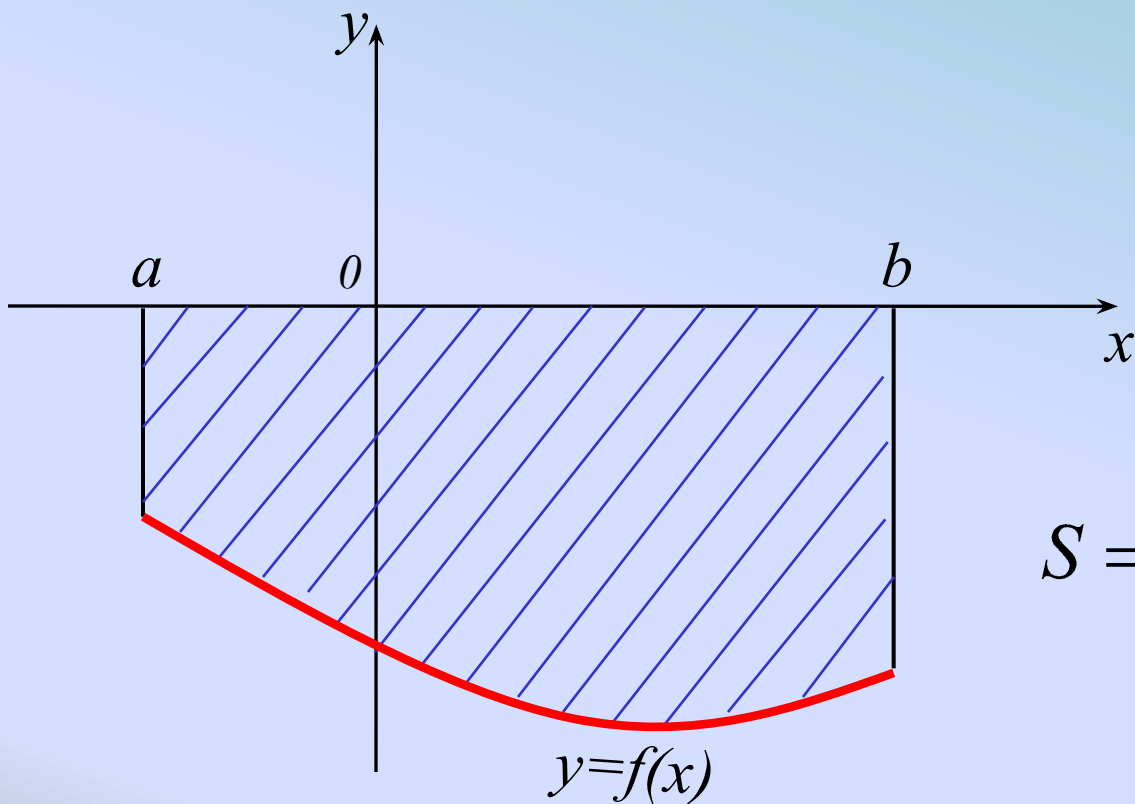
$y=f(x)$ непрерывная
 $f(x) \geq 0$ на $[a; b]$



$$S = \int_a^b f(x) dx$$

Найти площадь фигуры

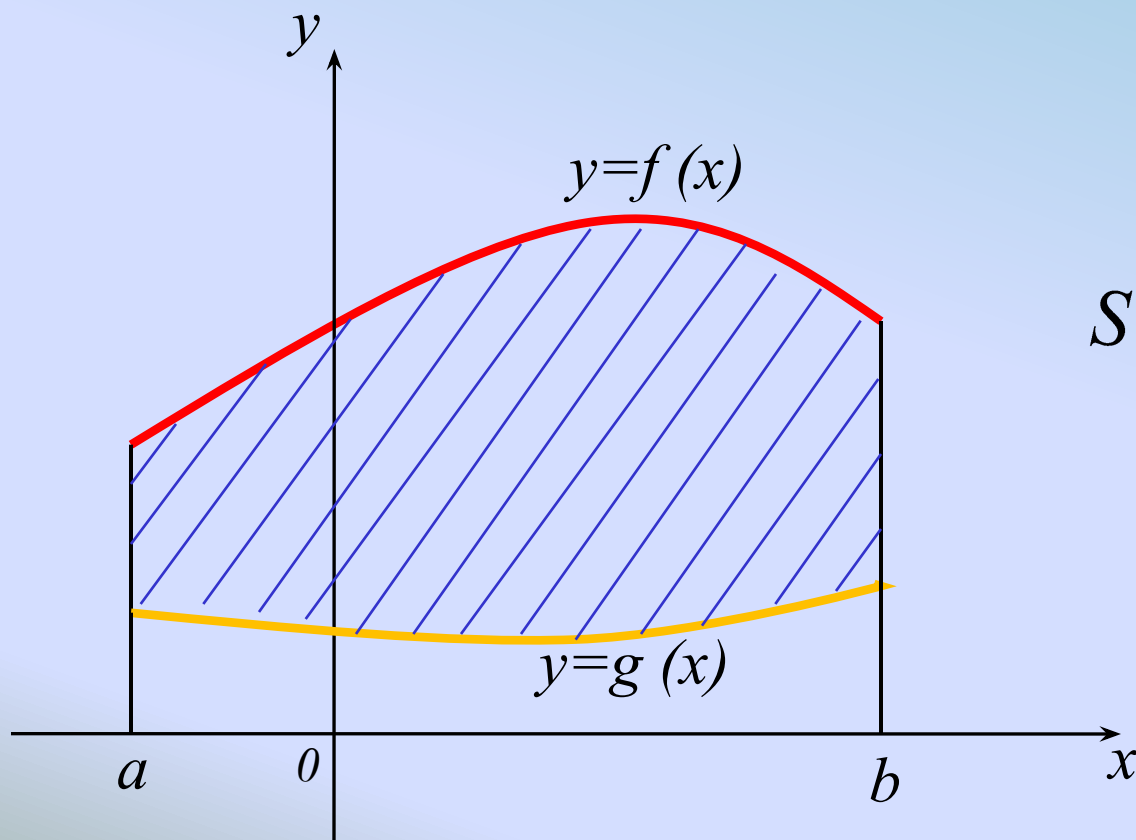
$y=f(x)$ непрерывная
 $f(x) \leq 0$ на $[a; b]$



$$S = -\int_a^b f(x)dx = \left| \int_a^b f(x)dx \right|$$

Найти площадь фигуры

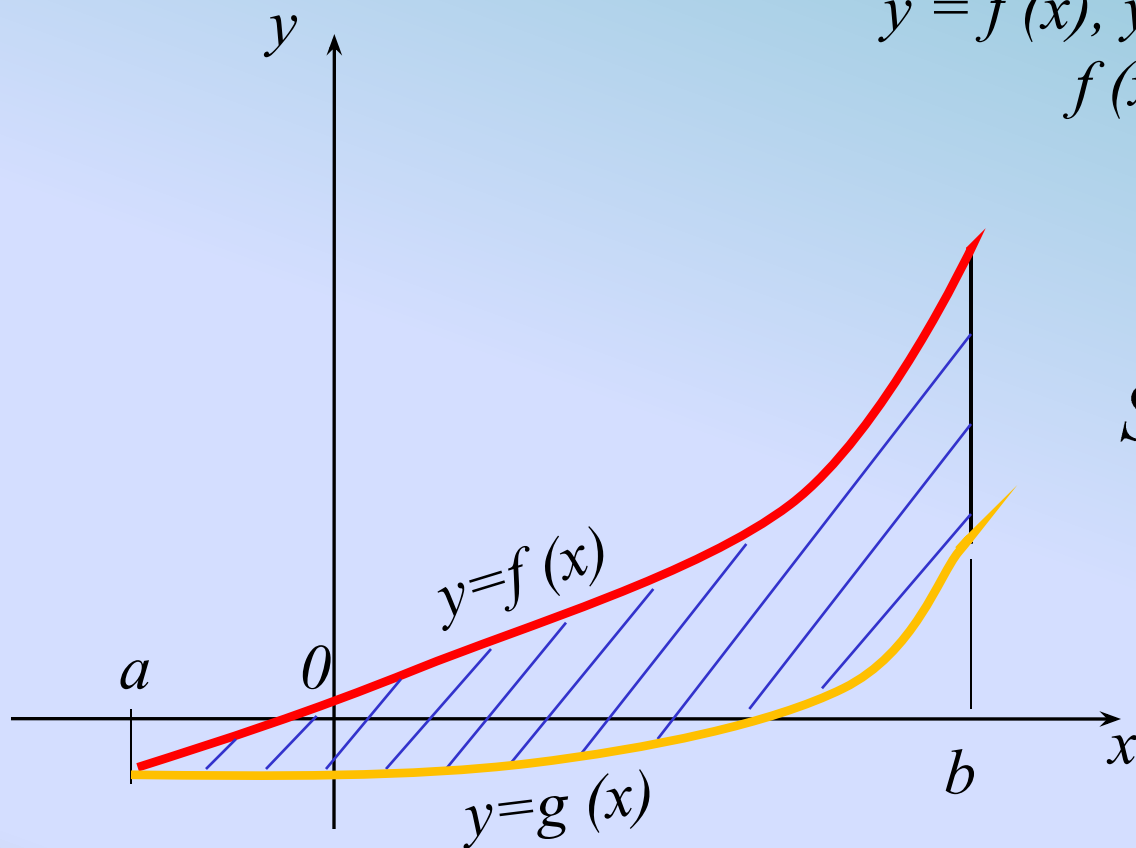
$y = f(x)$, $y = g(x)$ – непрерывные,
 $f(x) \geq g(x)$ на $[a; b]$



$$S = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$

Найти площадь фигуры

$y = f(x)$, $y = g(x)$ — непрерывные,
 $f(x) \geq g(x)$ на $[a; b]$



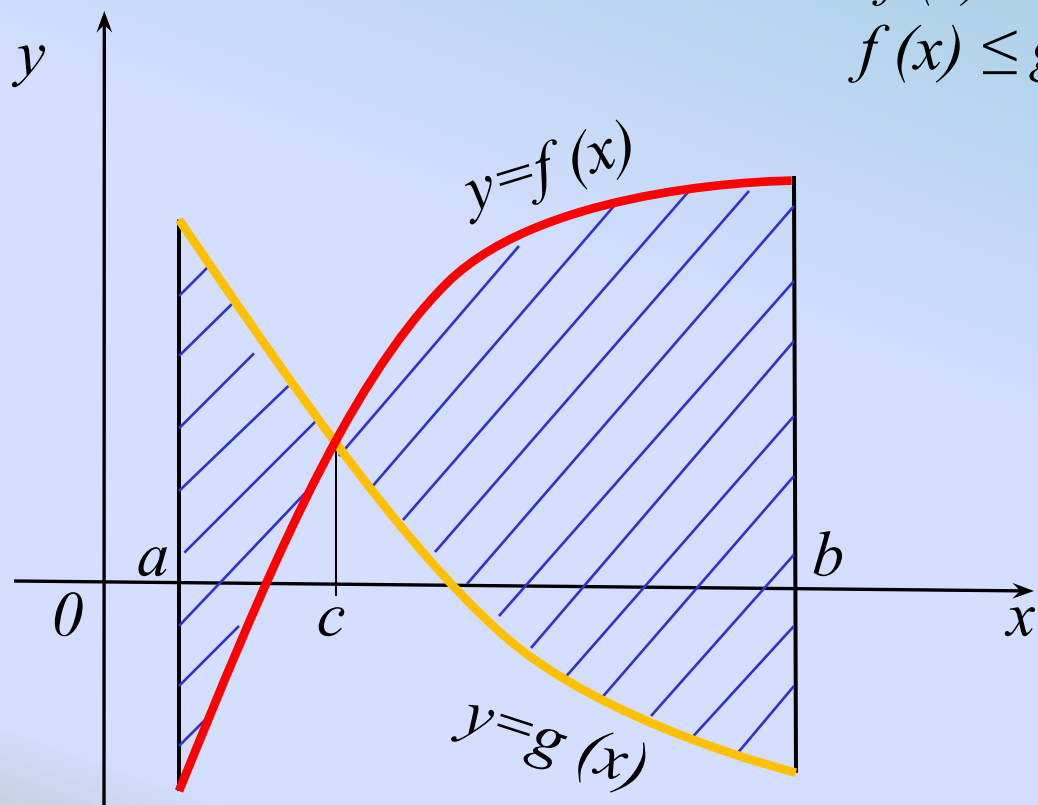
$$S = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$

Найти площадь фигуры

$y = f(x)$, $y = g(x)$ – непрерывные на $[a; b]$

$f(x) \geq g(x)$ на $[c; b]$

$f(x) \leq g(x)$ на $[a; c]$, где $c \in [a; b]$



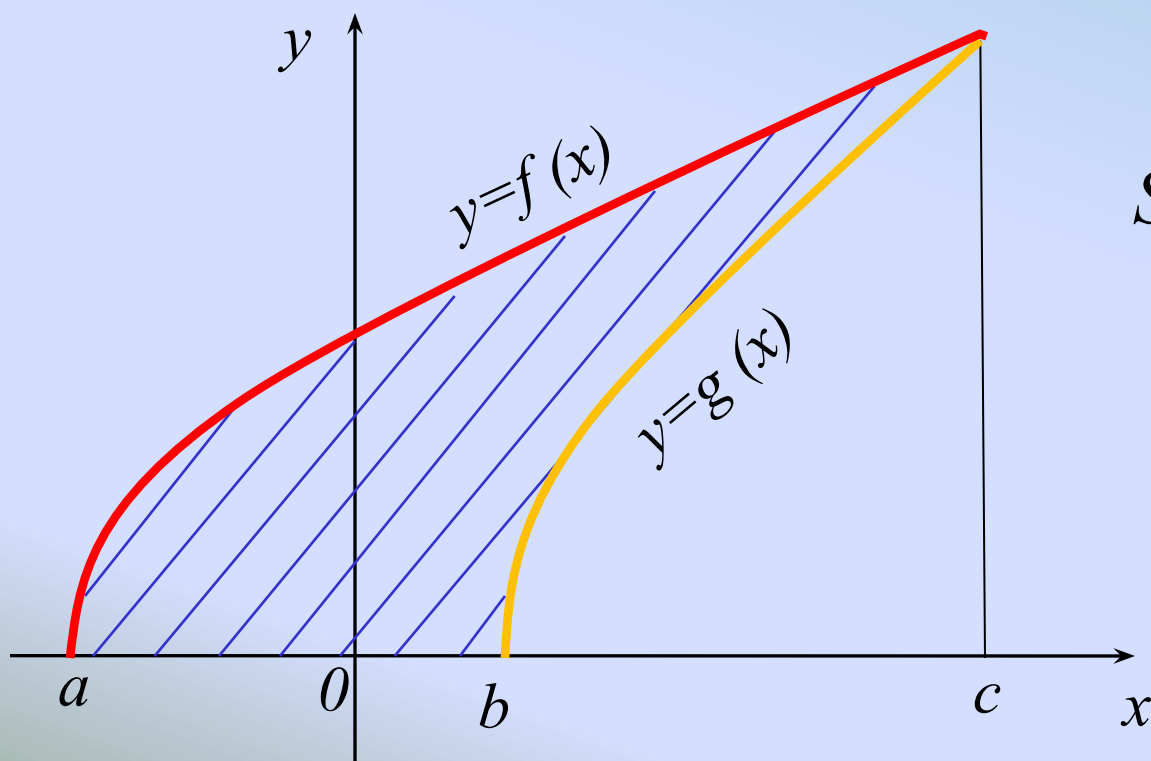
$$S = \int_a^c (g(x) - f(x))dx + \\ + \int_c^b (f(x) - g(x))dx$$

Найти площадь фигуры

$y = f(x)$ – непрерывная на $[a; c]$

$y = g(x)$ – непрерывная на $[b; c]$

$f(x) \geq g(x)$ на $[a; c]$, где $c \notin [a; b]$



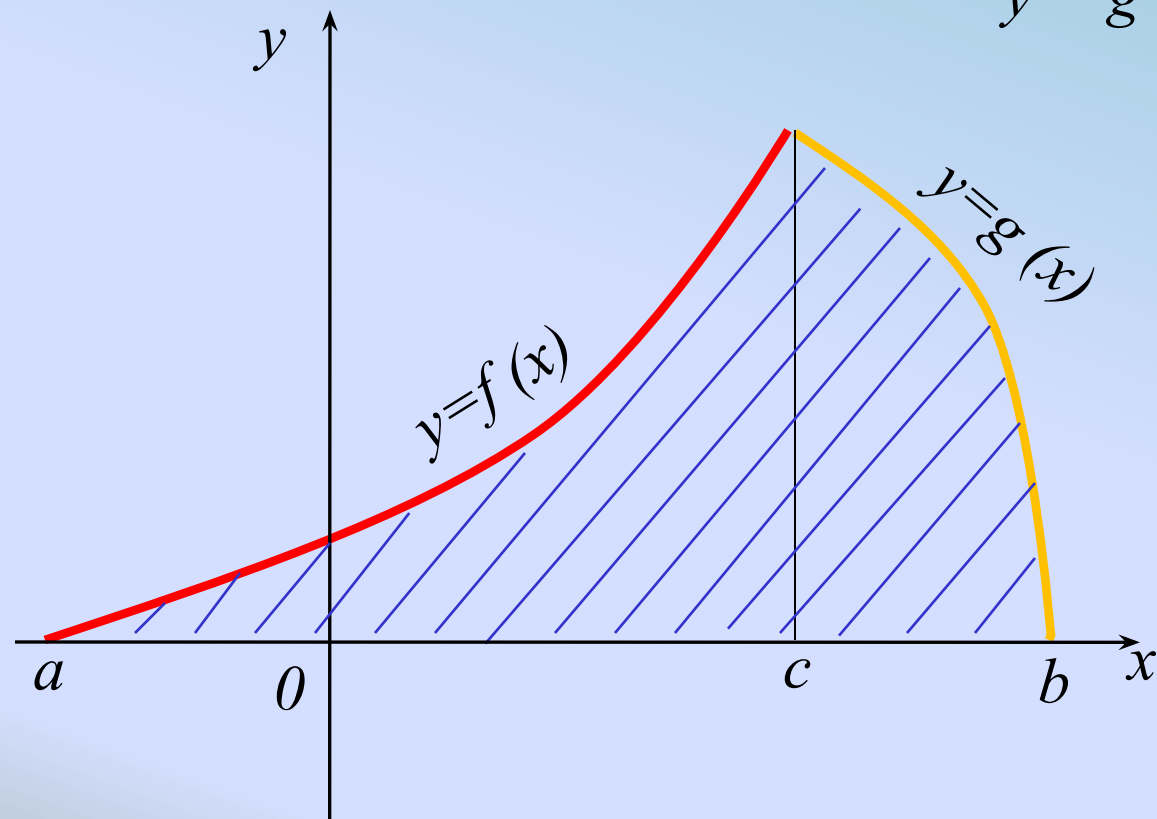
$$S = \int_a^c f(x)dx - \int_b^c g(x)dx$$

Найти площадь фигуры

$y = f(x)$ – непрерывная на $[a; c]$

$y = g(x)$ – непрерывная на $[c; b]$,

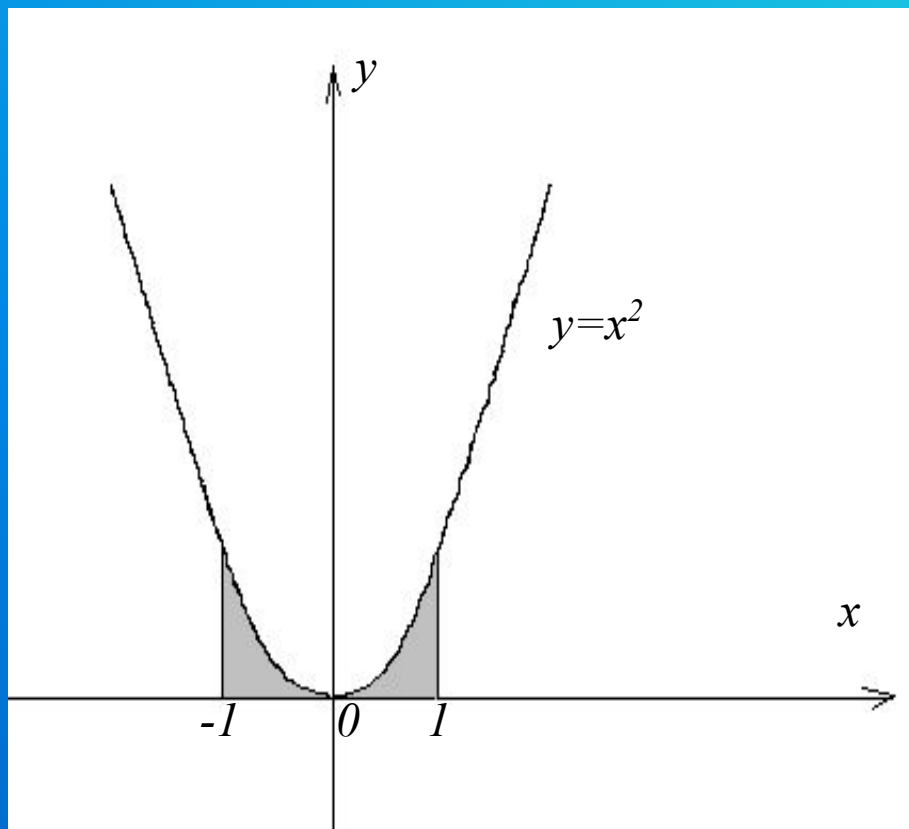
где $c \in [a; b]$



$$S = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b g(x) dx$$

Разминка

Найти площадь изображенной фигуры

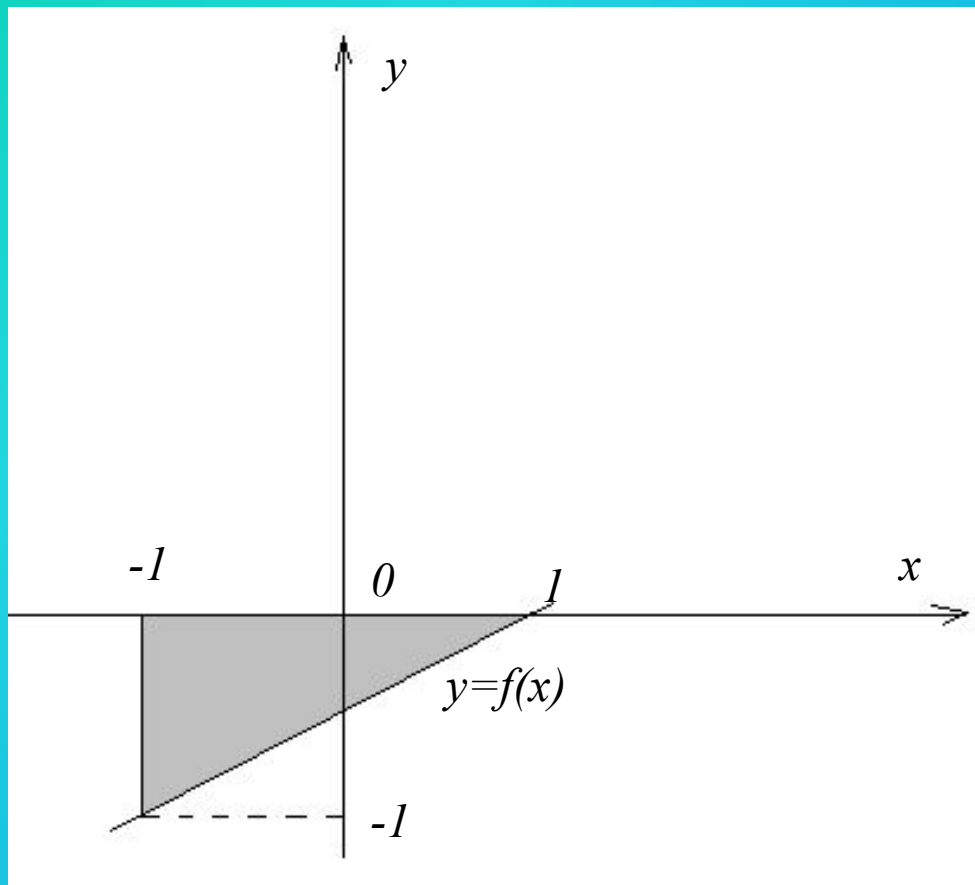


$$S = \frac{2}{3}$$

(четность функции)

Разминка

Найти площадь изображенной фигуры



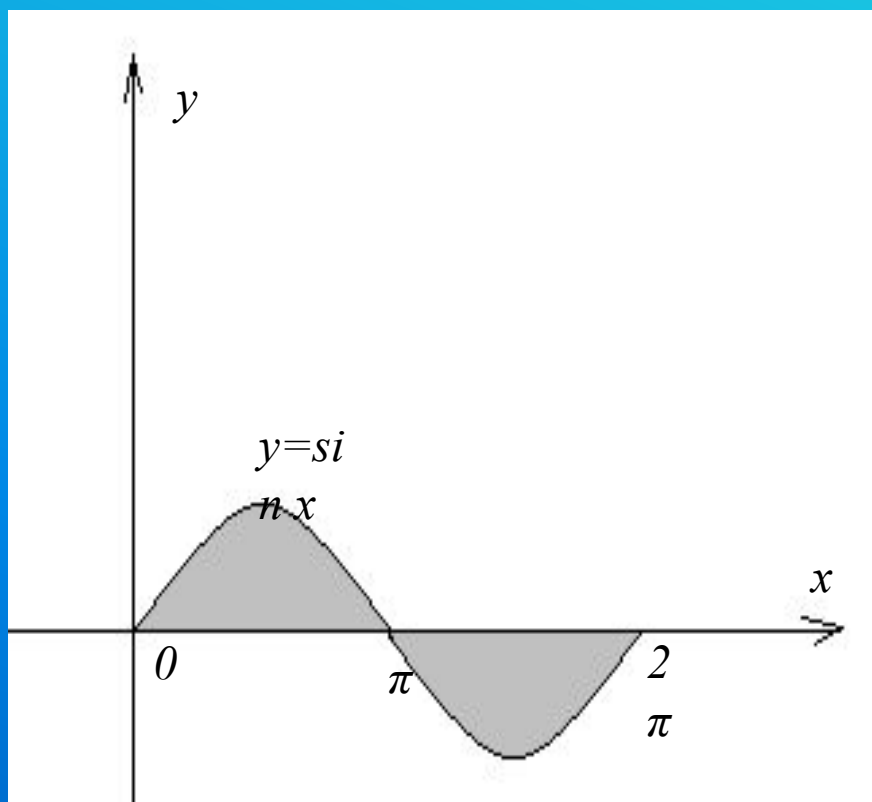
$$f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

$$S = 4$$

(площадь прямоугольного
треугольника)

Разминка

Найти площадь изображенной фигуры

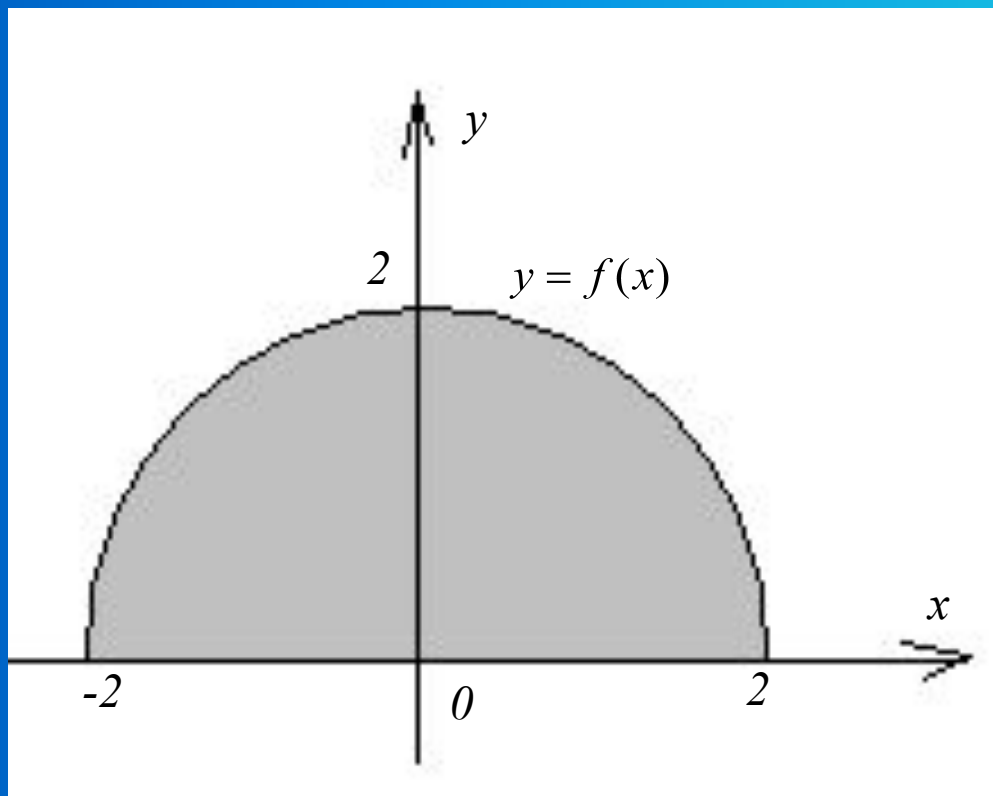


$$S = 4$$

(равенство фигур)

Разминка

Найти площадь изображенной фигуры



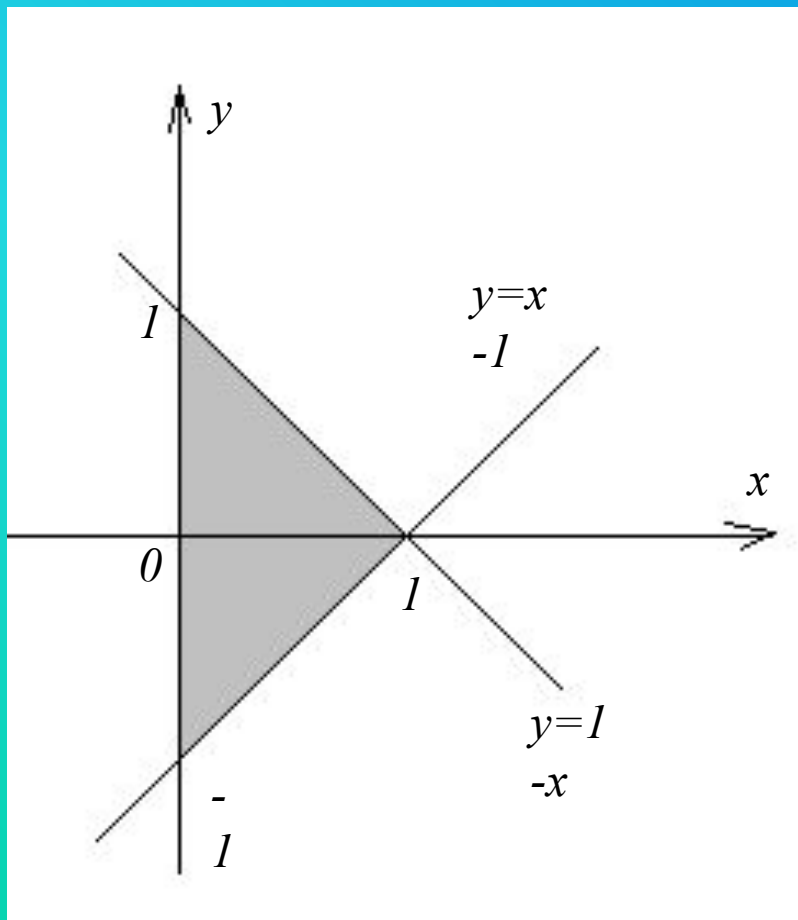
$$f(x) = \sqrt{4 - x^2}$$

$$S = 2\pi$$

(площадь полукруга)

Разминка

Найти площадь изображенной фигуры



$$S = 1$$

(площадь треугольника)

Задачи

- 1) Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

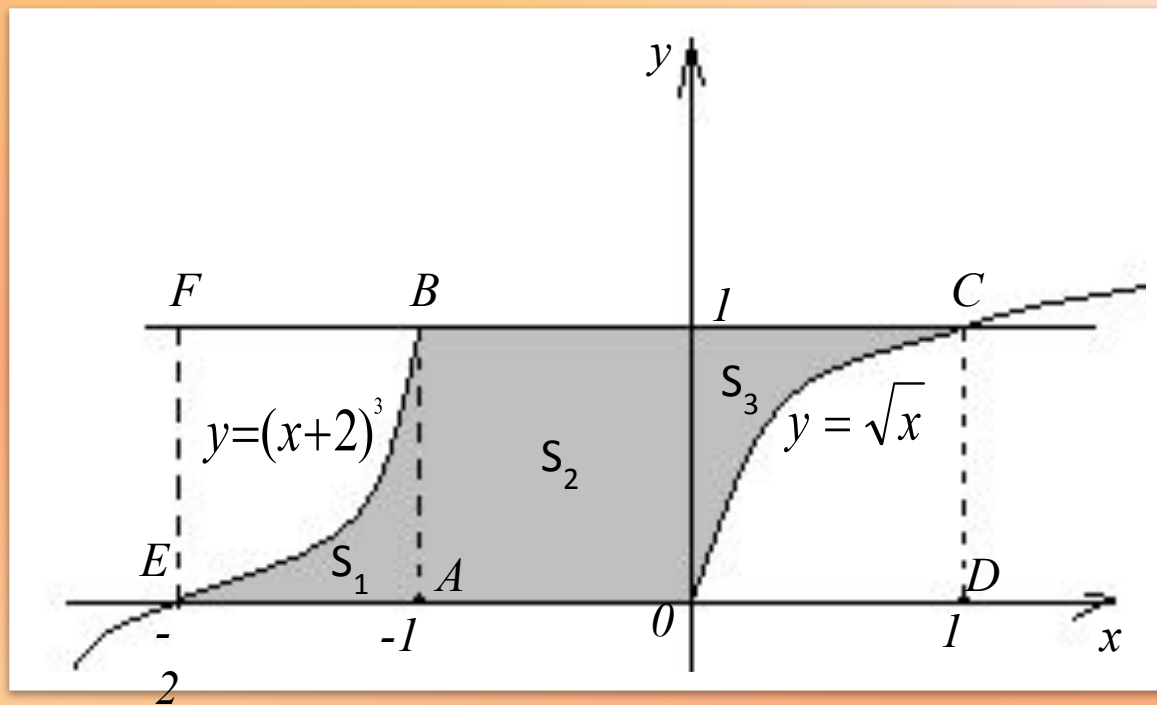
$$y = \sqrt{x}$$

$$y = (x+2)^3$$

$$y = 0$$

$$y = 1$$

$$y = \sqrt{x} \quad y = (x+2)^3 \quad y = 0 \quad y = 1$$



$$S = 19/12$$

1 способ

$$S = S_1 + S_2 + S_3$$

2 способ

$$S = S_1 + S_{ABCD} - S_{OCD}$$

3 способ

$$S = S_{EFCD} - S_{EFB} - S_{OCD}$$

2) Фигура, ограниченная линиями

$$y=x+6,$$

$$x=1,$$

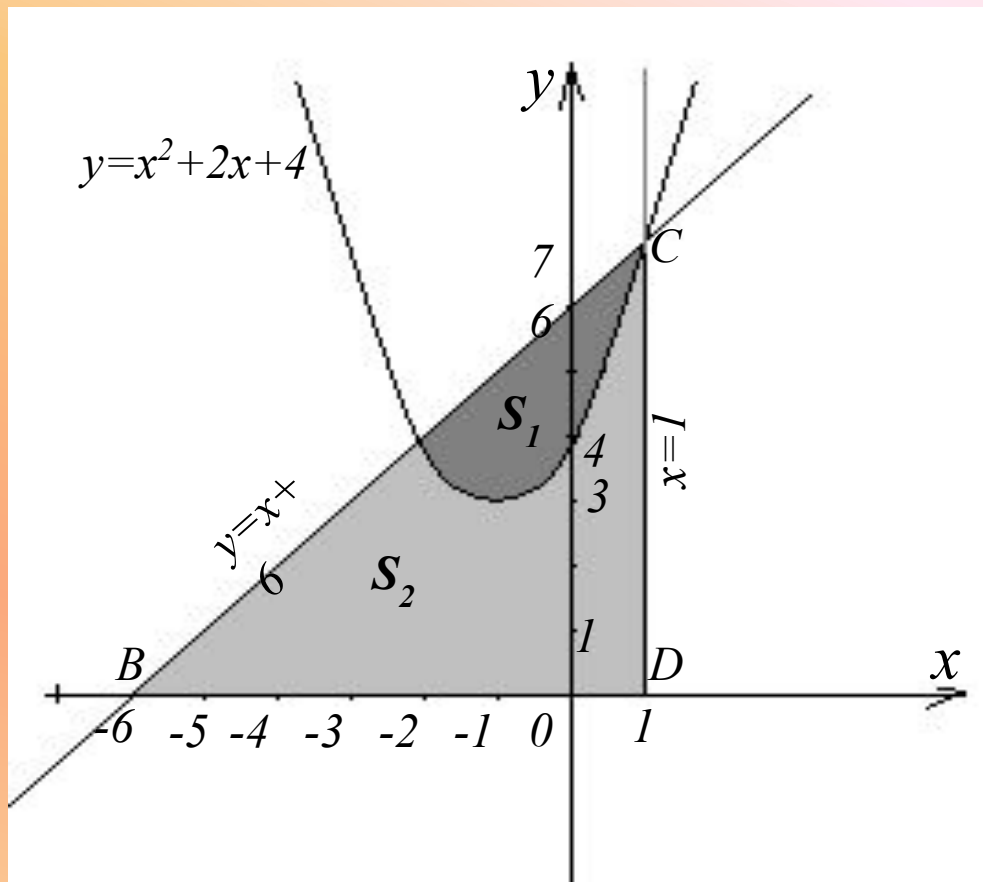
$$y=0,$$

делится параболой

$$y=x^2 + 2x + 4$$

на две части.

Найти площадь каждой части.



$$S_1 = 4,5$$

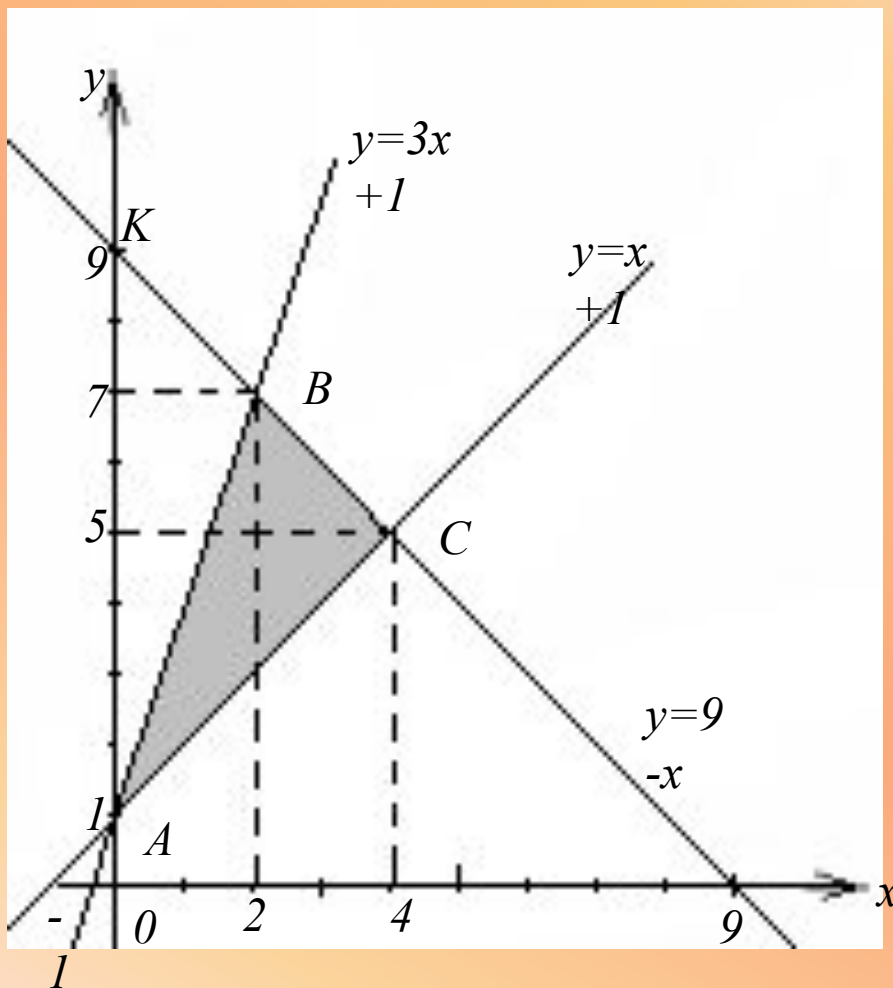
$$S_2 = 20$$

$$S_{\Delta BCD} = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 7 = 24,5$$

$$S_1 = \int_{-2}^1 [(x + 6) - (x^2 + 2x + 4)] dx = 4,5$$

$$S_2 = S_{\Delta BCD} - S_1$$

Найти площадь фигуры, ограниченной прямыми



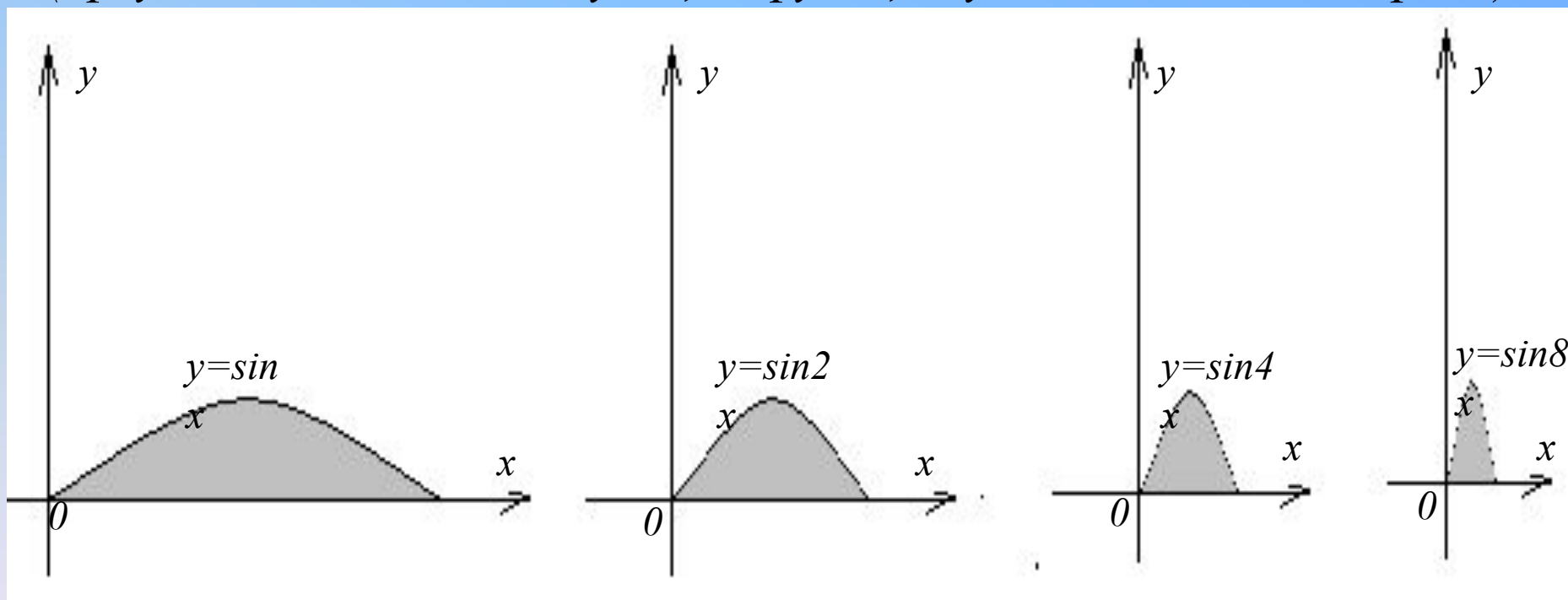
$$y = 3x + 1$$

$$y = 9 - x$$

$$y = x + 1$$

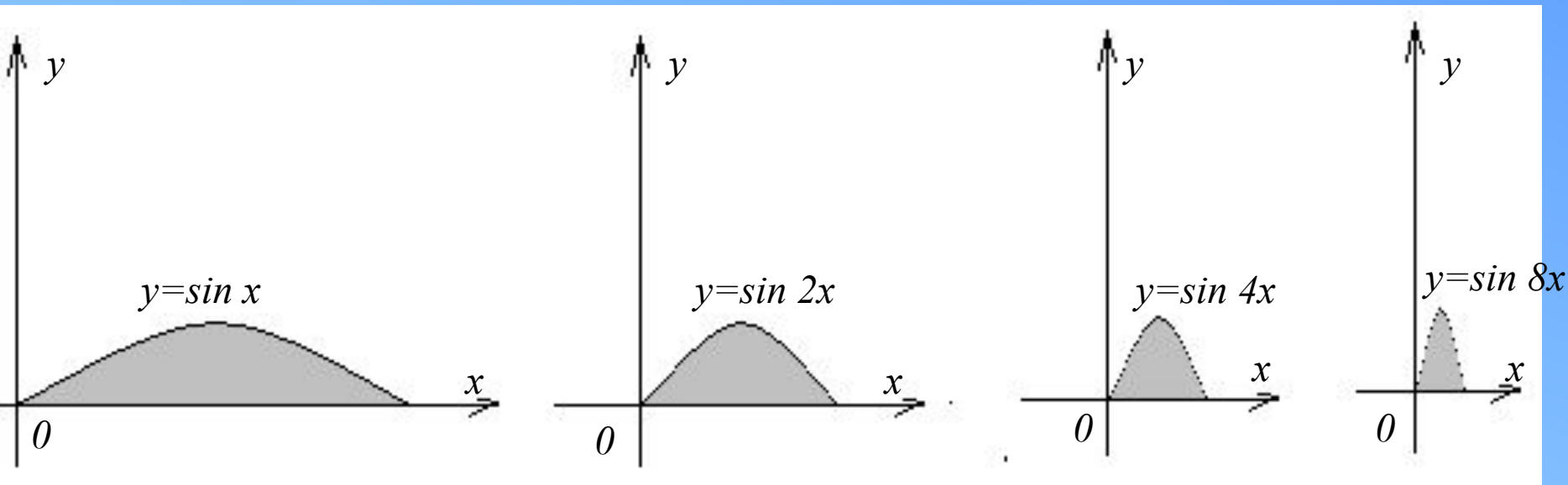
Интересные задачи

1. Найти сумму площадей бесконечного количества фигур, изображенных на рисунке.
(аргумент каждой следующей функции увеличивается в 2 раза)



Указания к решению: $\sin nx = 0$

Решение



$$\sin nx = 0, \quad nx = \pi, \quad x = \frac{\pi}{n}, \quad \text{где } n = 1, 2, 4, 8, \dots$$

$$S_n = \int_0^{\pi/n} \sin nx \, dx = \frac{2}{n}$$

$$S_n = 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = \frac{2}{1 - \frac{1}{2}} = 4.$$

Ответ: 4.

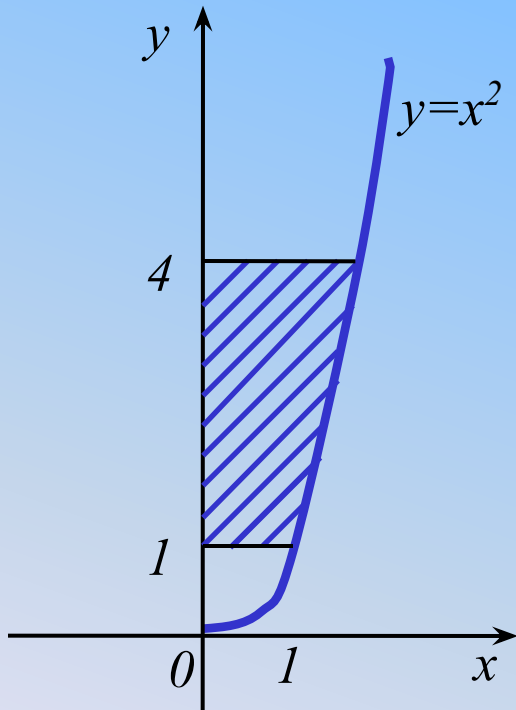
2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

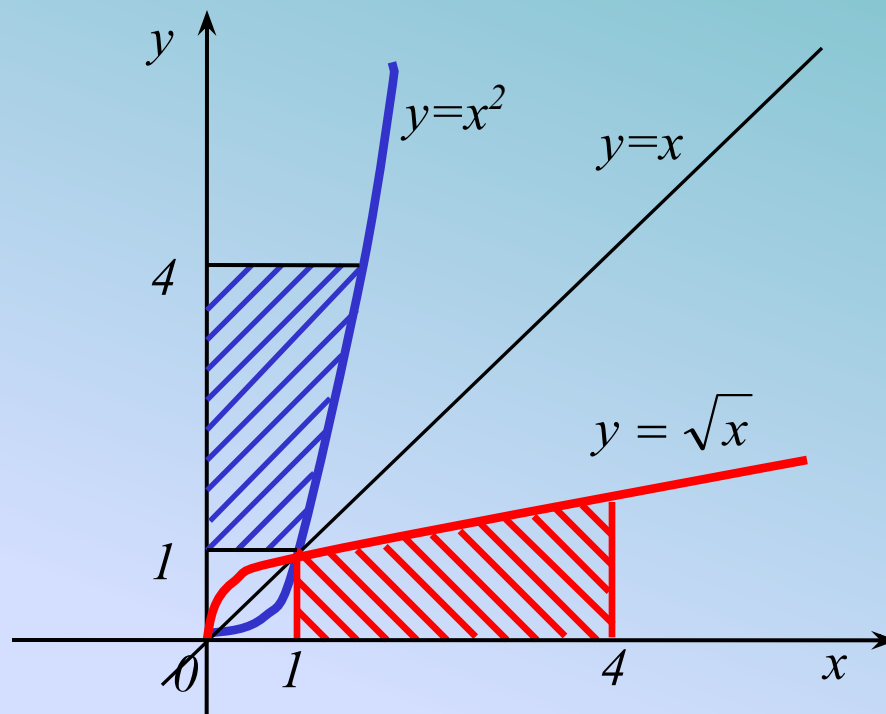
$$y = x^2, \text{ при } x \geq 0$$

$$y = 1$$

$$y = 4$$

$$x = 0$$

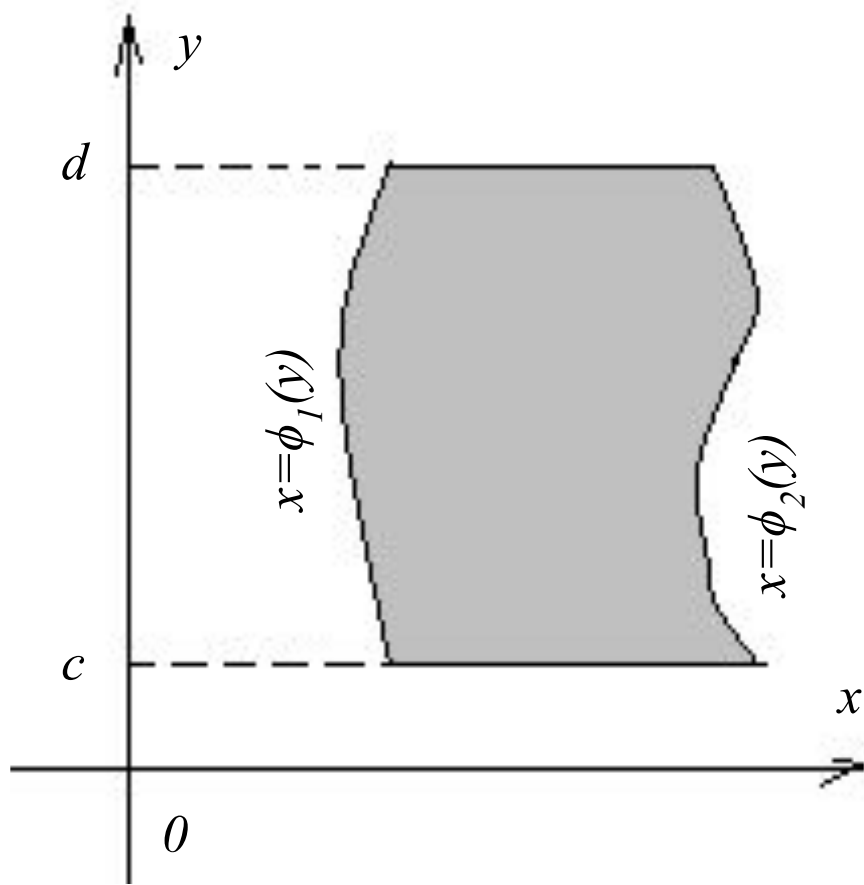




Данная фигура симметрична криволинейной трапеции, ограниченной прямыми $x=1$, $x=4$, $y=0$, графиком функции, обратной $y=x^2$, $x \geq 0$, т. е. $y = \sqrt{x}$

Поэтому фигуры имеют равные площади

$$S = \int_1^4 \sqrt{x} dx$$



Если фигура ограничена
линиями

$$x = \phi_1(y), \quad x = \phi_2(y), \quad y = c; \\ y = d,$$

где $c < d$ и $\phi_2(y) \geq \phi_1(y)$,
на $[c; d]$,

то ее площадь может
быть вычислена по
формуле

$$S = \int_c^d (\phi_2(y) - \phi_1(y)) dy$$



Используемая литература

- *Алимов Ш.А. и др.* Алгебра и начала анализа. Учебник для 10-11 классов общеобразовательных учреждений. 2002г.
- *Звавич Л.И., Рязановский А.Р., Поташник А.М.* Сборник задач по алгебре и математическому анализу для 10-11 кл. Вып.1 «Интеграл и площадь» 1996г.
- *Галицкий М.Л. и др.* Углубленное изучение алгебры и математического анализа. 10-11. Пособие для учителя. 1997г.

