

Понятие бесконечной интегральной суммы. Интеграл.

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a),$$

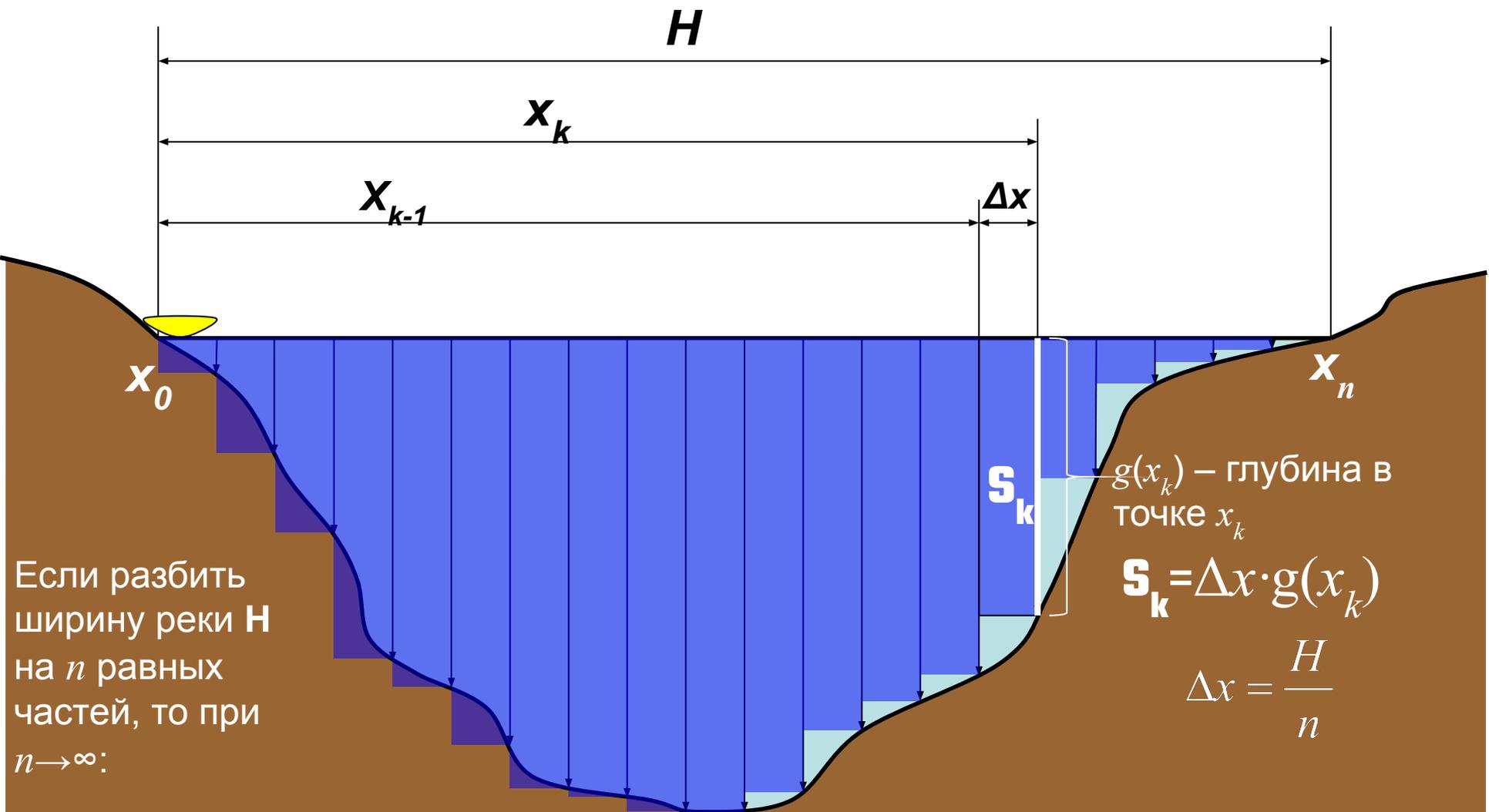
– формула

Ньютона-Лейбница

$$F'(x) = f(x)$$

Алгебра и начала анализа, 11 класс

Вычисление площади сечения реки.



Если разбить
ширину реки H
на n равных
частей, то при
 $n \rightarrow \infty$:

$g(x_k)$ – глубина в
точке x_k

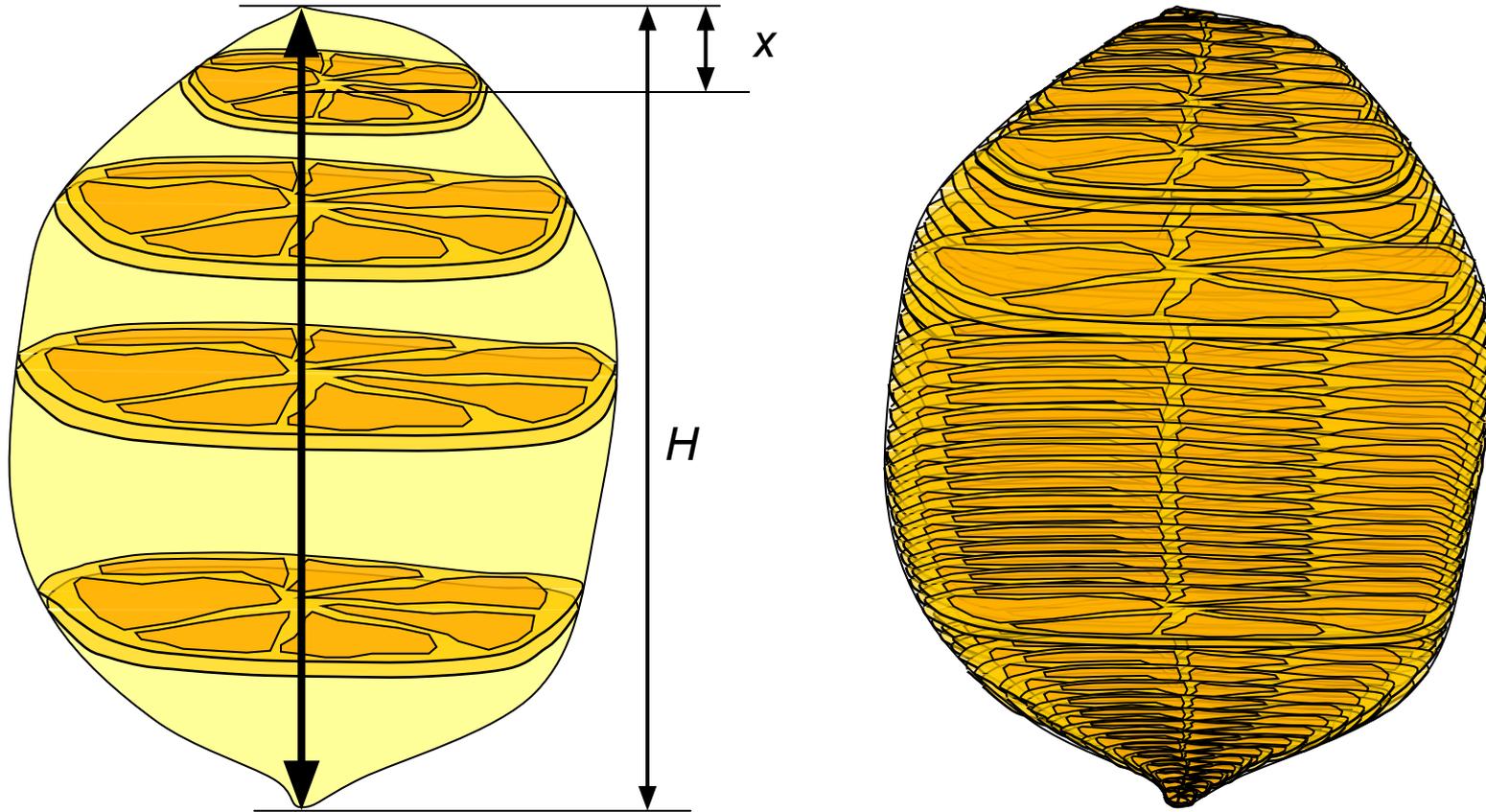
$$S_k = \Delta x \cdot g(x_k)$$

$$\Delta x = \frac{H}{n}$$

$$S_{\text{итого}} \approx S_1 + S_2 + \dots + S_n = \frac{H}{n} (g(x_1) + g(x_2) + \dots + g(x_n)) = \Delta x \cdot g(x_1) + \Delta x \cdot g(x_2) + \dots + \Delta x \cdot g(x_n)$$

Последнее выражение в равенстве и есть **бесконечная интегральная сумма**.

Чтобы получить представление об общем методе вычисления объемов различных пространственных фигур, попробуем найти объем лимона. Ни на одно из тел, изучаемых в школе (призма, пирамида, шар, конус и т.д.), лимон не похож. Однако, мы можем поступить как все хозяйки – разрезать лимон на тонкие ломтики, размер которых зависит от расстояния x , причем $x \in [0; H]$.



Тогда, по свойству объема, сумма объемов всех ломтиков даст нам объем всего лимона.

С точки зрения геометрии мы построили сечения пространственной фигуры плоскостями, перпендикулярными оси фигуры; причем, если принять число разбиений бесконечно большим числом ($n \rightarrow \infty$), то:



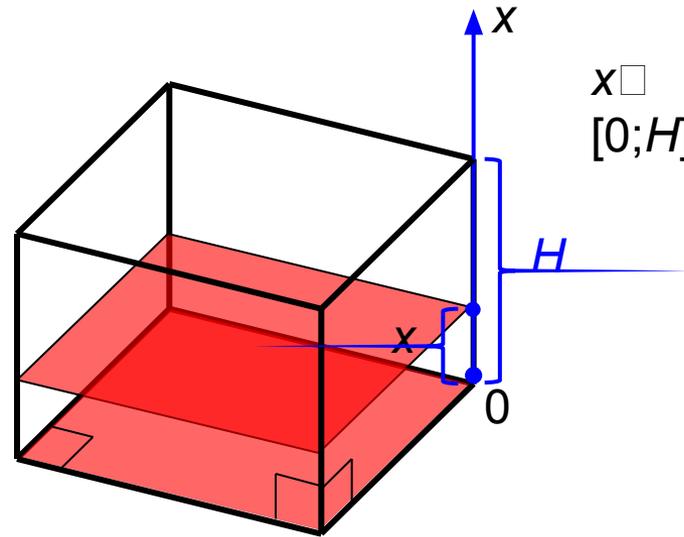
Проще говоря, при бесконечном числе разбиений каждый ломтик «вырождается» в плоское сечение и объем лимона равен **бесконечной интегральной сумме** площадей таких сечений, зависящих от расстояния x , т.е.

$$V_{\text{тела}} \approx S_1 + S_2 + \dots + S_n = \sum_{n=1}^{\infty} S_n$$

где H – высота тела, а $S_{\text{сеч.}}$ – некоторая функция, зависящая от x , причем $x \in [0; H]$.

Примечание. \sum – так сокращенно обозначают знак суммы.

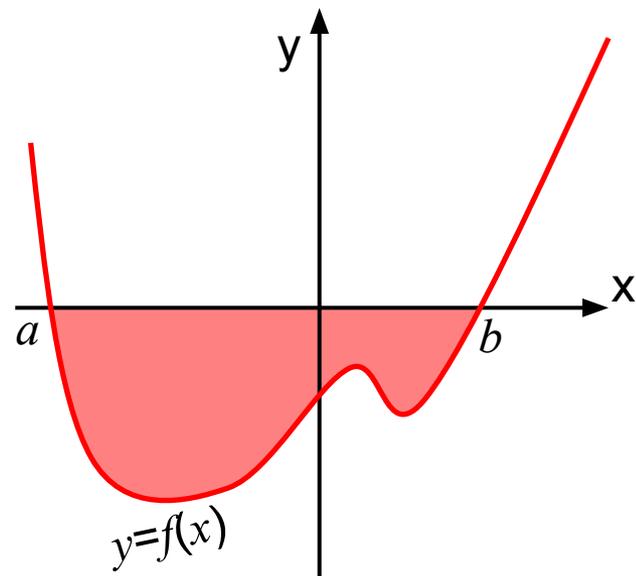
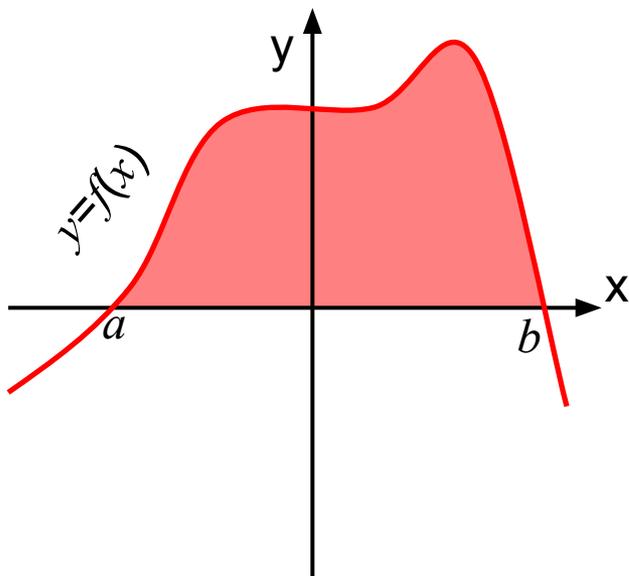
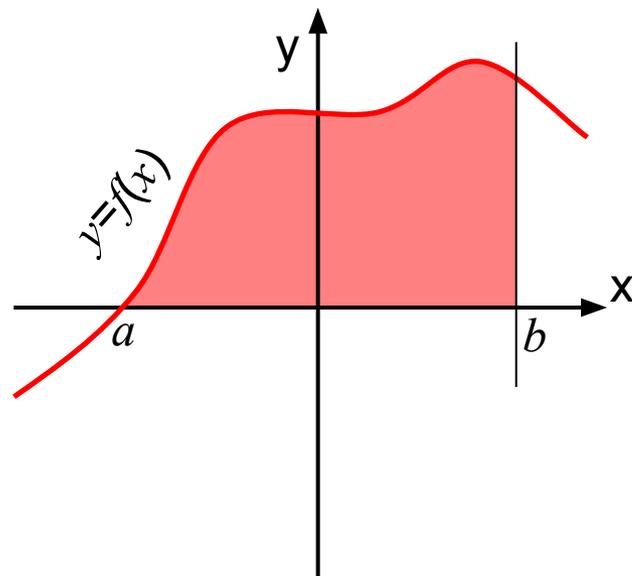
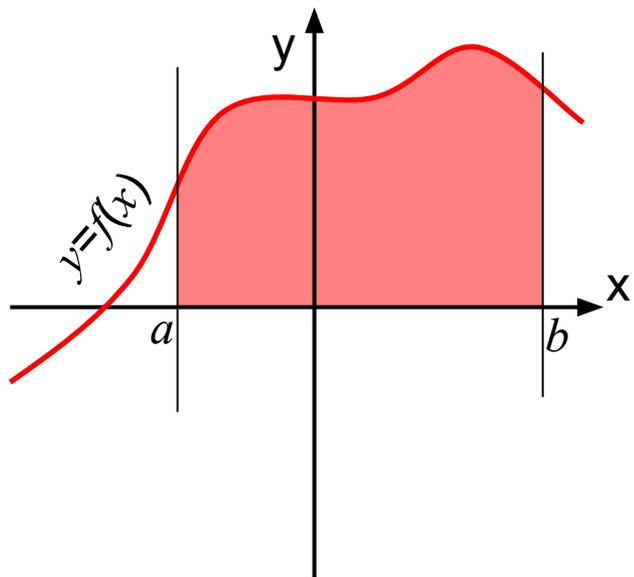
Применяя понятие бесконечной интегральной суммы попробуйте самостоятельно объяснить данный пример и вывод окончательной формулы объема прямоугольного параллелепипеда (для проверки 😊):



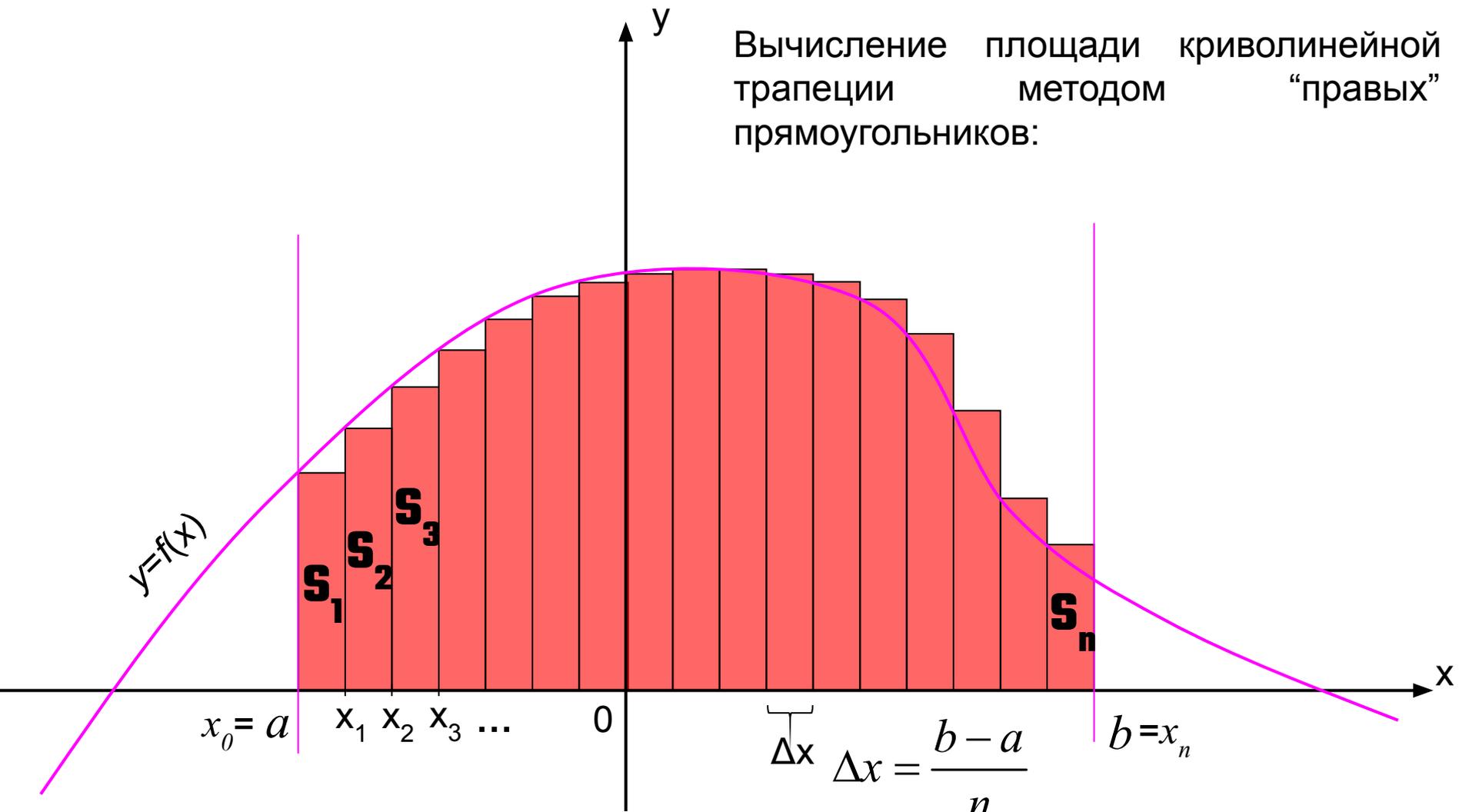
$$V_{\text{пр.пар.}} = (S_1 + S_2 + \dots + S_n) \cdot \Delta x = n \cdot S_{\text{осн.}} \cdot \frac{H}{n} = S_{\text{осн.}} \cdot H$$

Объем прямоугольного параллелепипеда равен бесконечной интегральной сумме площадей сечения (равных площади основания) на промежутке [0; H] (взятых вдоль высоты).

Понятие о криволинейной трапеции.



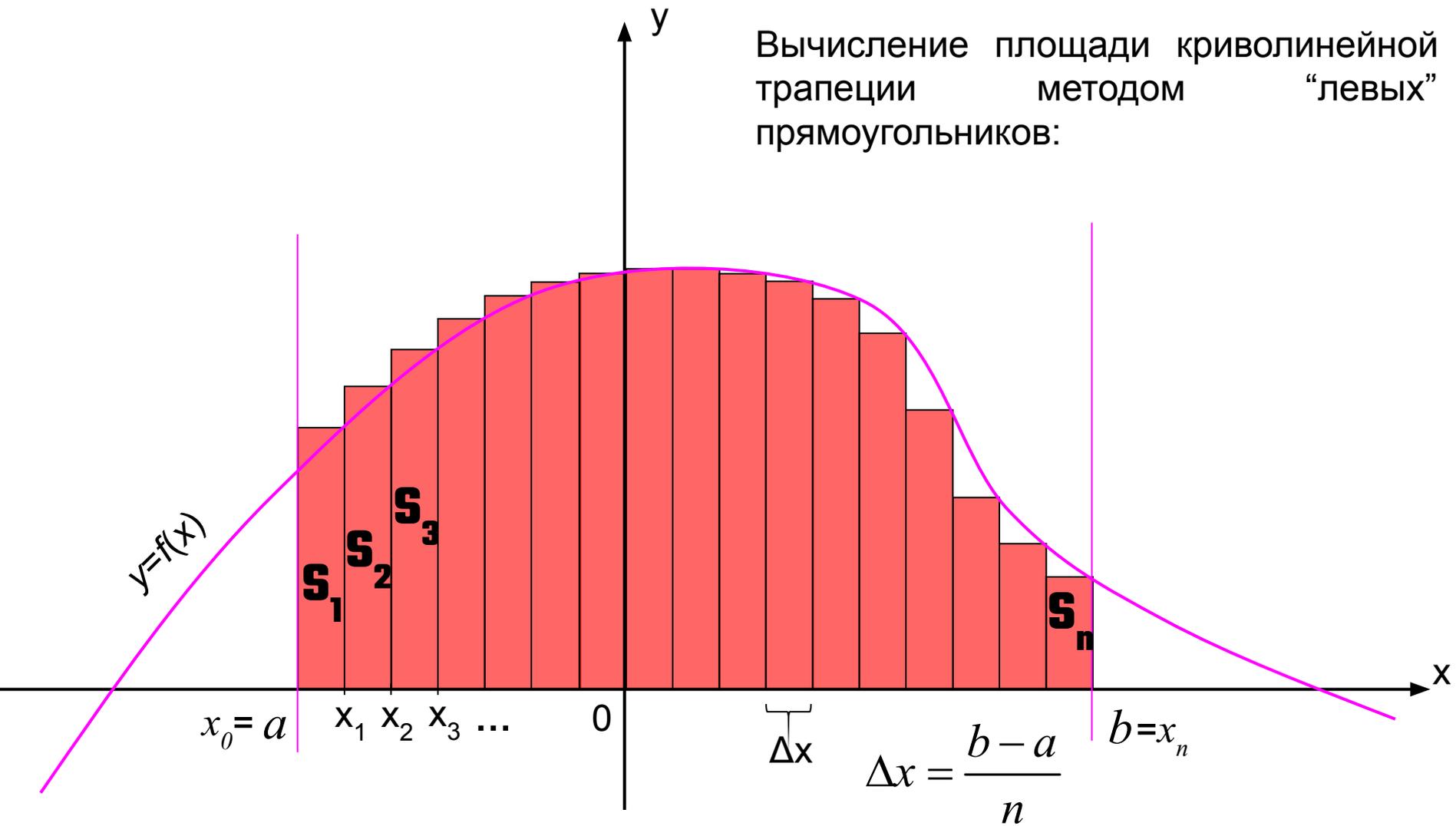
Вычисление площади криволинейной трапеции методом “правых” прямоугольников:



$$S_{\text{е.о.о.о.}} \approx S_1 + S_2 + \dots + S_n = \Delta x \cdot f(x_0) + \Delta x \cdot f(x_1) + \dots + \Delta x \cdot f(x_{n-1}) =$$

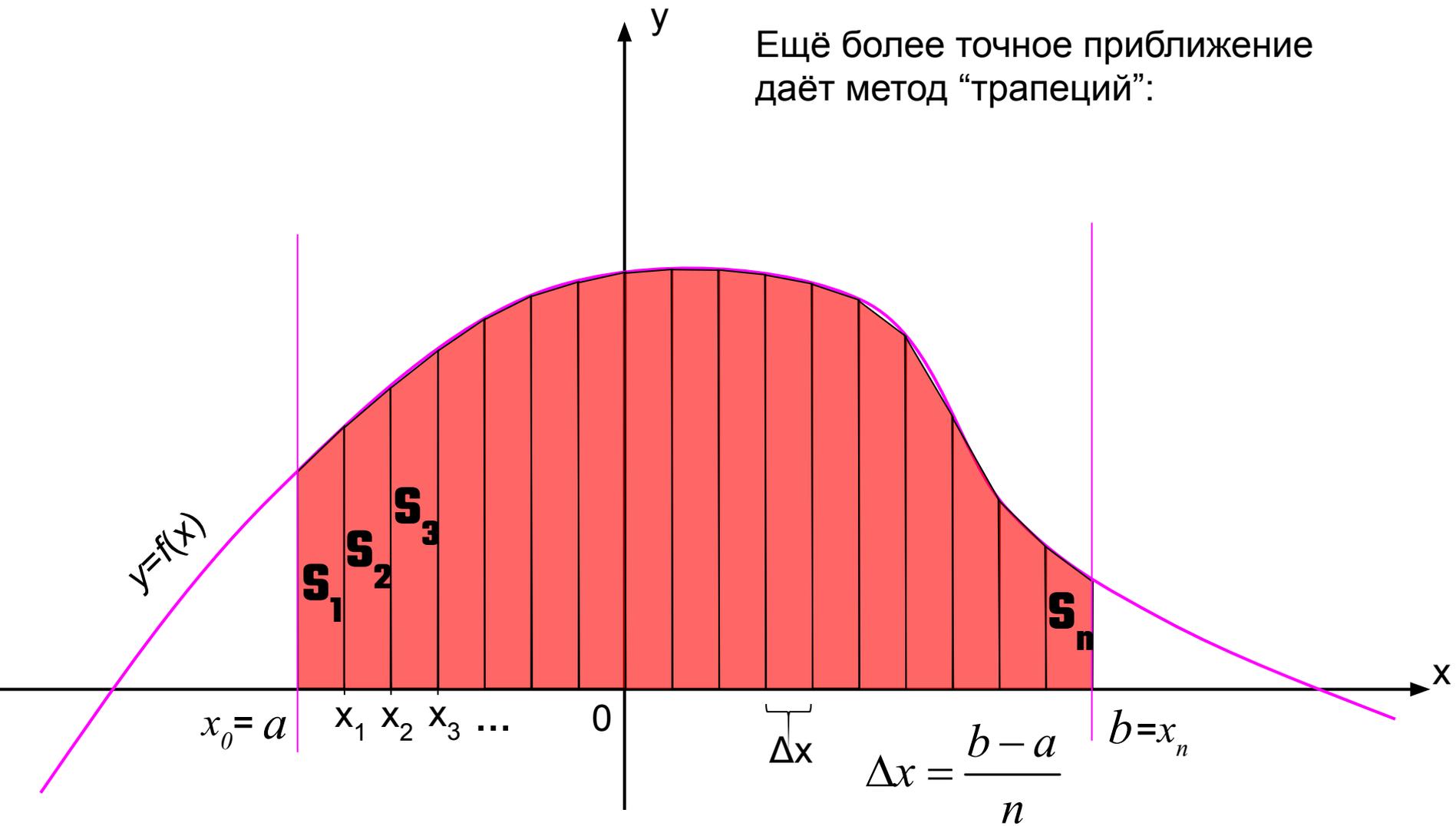
$$= \Delta x \cdot (f(x_0) + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1})) = \Delta x \cdot \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)$$

Вычисление площади криволинейной трапеции методом “левых” прямоугольников:



$$\begin{aligned} S_{\text{э.д.н.д.}} &\approx S_1 + S_2 + \dots + S_n = \Delta x \cdot f(x_1) + \Delta x \cdot f(x_2) + \dots + \Delta x \cdot f(x_n) = \\ &= \Delta x \cdot (f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)) = \Delta x \cdot \sum_{k=1}^n f(x_k) \end{aligned}$$

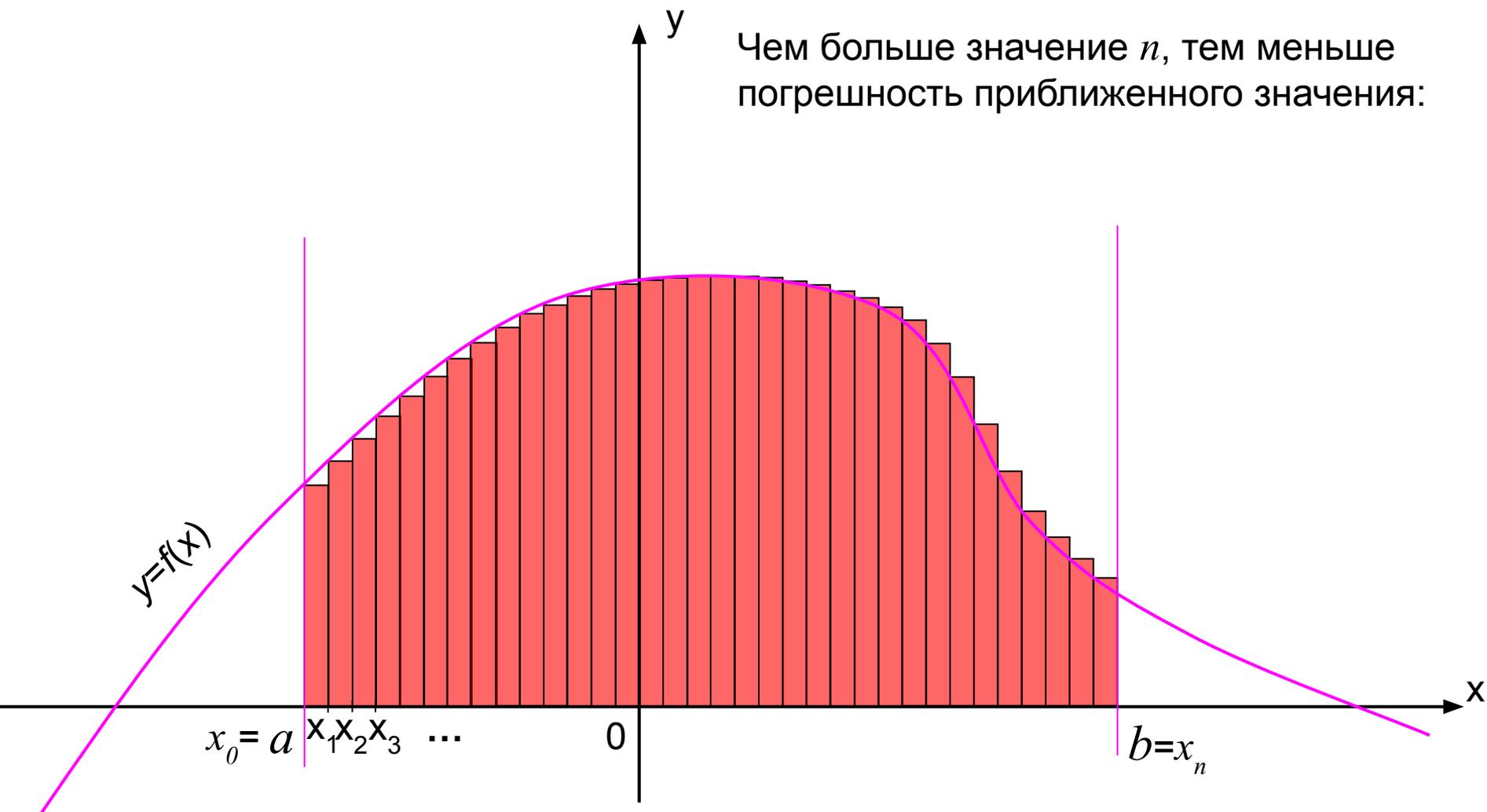
Ещё более точное приближение даёт метод “трапеций”:



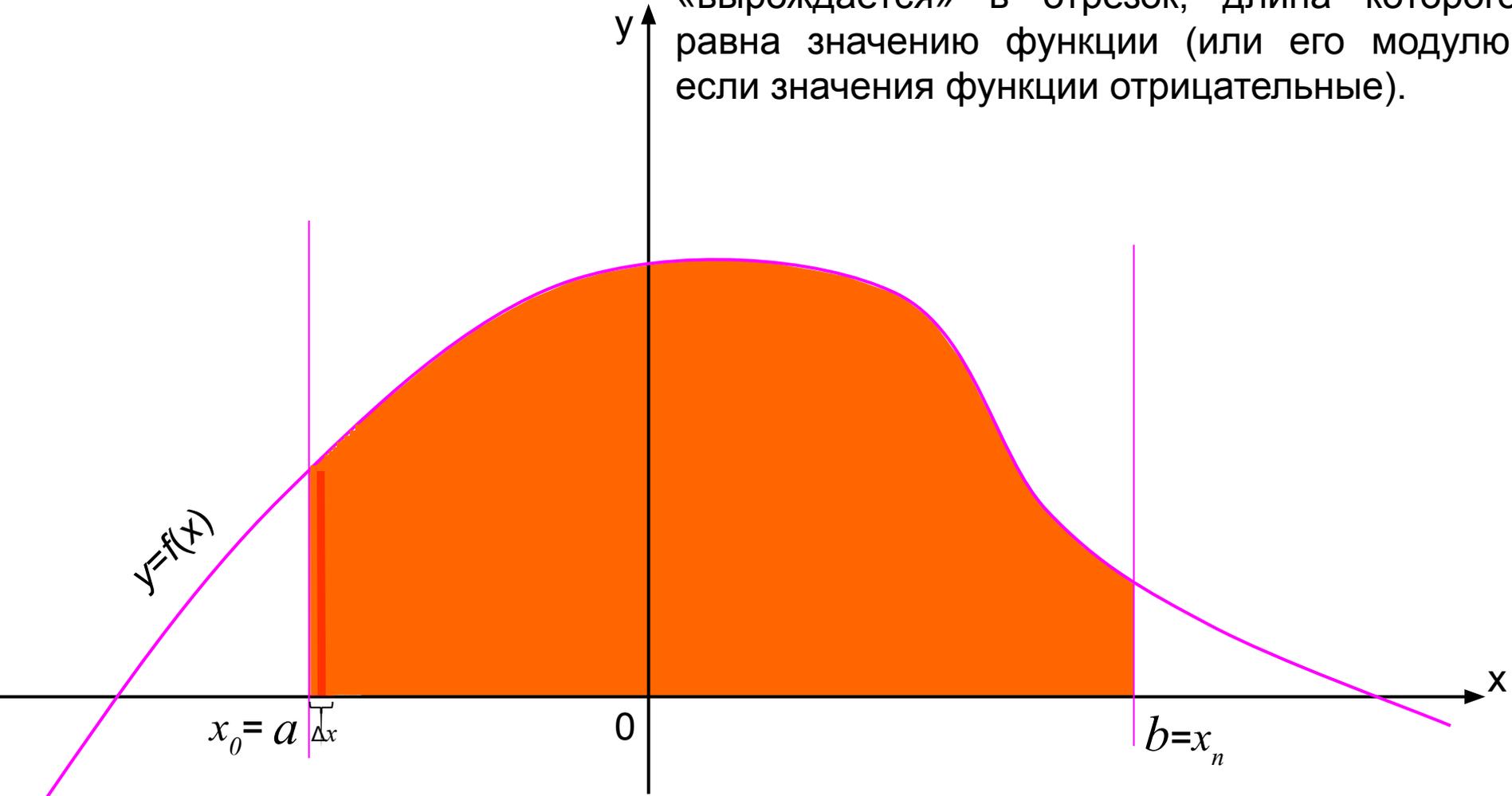
$$S_{\text{ед.н.д.}} \approx S_1 + S_2 + \dots + S_n = \frac{f(x_0) + f(x_1)}{2} \cdot \Delta x + \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \cdot \Delta x + \dots + \frac{f(x_{n-1}) + f(x_n)}{2} \cdot \Delta x =$$

$$= \frac{\Delta x}{2} (f(x_0) + 2f(x_1) + \dots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)) = \frac{f(x_0) + f(x_n)}{2} \cdot \Delta x \cdot \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)$$

Чем больше значение n , тем меньше погрешность приближенного значения:



При $n \rightarrow \infty \Rightarrow \Delta x \rightarrow 0$ и каждый прямоугольник «вырождается» в отрезок, длина которого равна значению функции (или его модулю, если значения функции отрицательные).



Таким образом, площадь криволинейной трапеции равна **бесконечной интегральной сумме** значений данной функции на промежутке $[a; b]$.

В приведенном выше примере мы находили площадь криволинейной трапеции с помощью понятия **бесконечной интегральной суммы** значений данной функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$. В математике принята более короткая запись этого понятия – **интеграл** (\int), т.е.

$$\Delta x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} f(x_n) = \int_a^b f(x) dx$$

Читают: **интеграл от a до b эф от икс дэ икс.**

Число a называют *нижним пределом интегрирования*, b – *верхним пределом интегрирования*, $f(x)$ – *подынтегральной функцией*, x – *переменной интегрирования*.

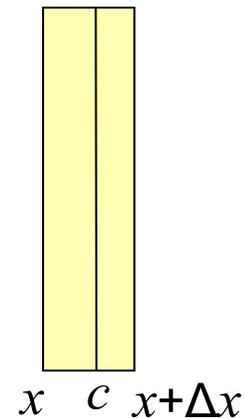
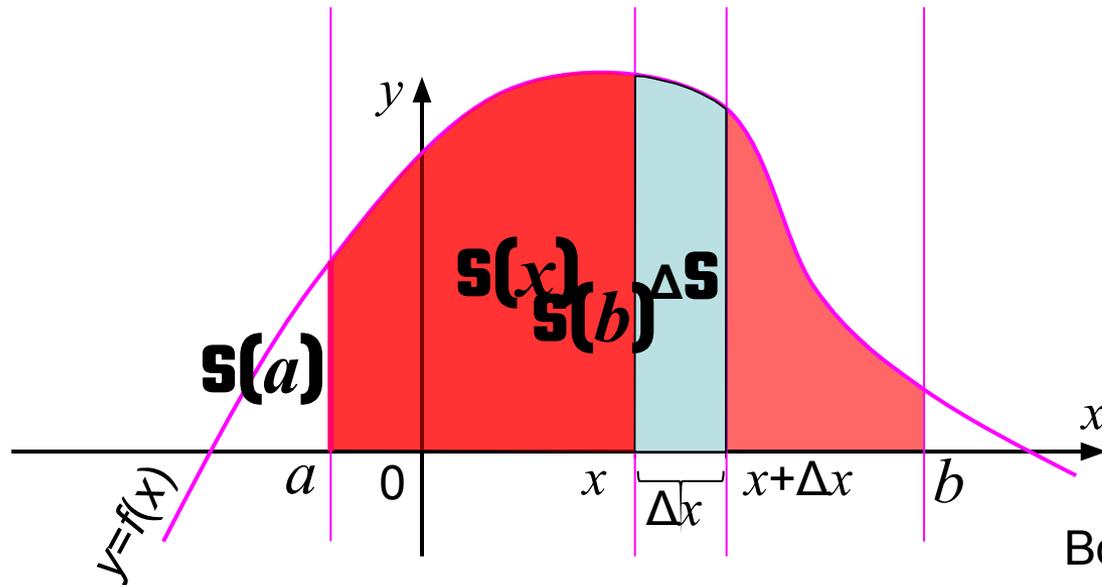
Примечание. Обратите внимание, что знак интеграла напоминает стилизованную букву **S**, что естественно из геометрического смысла этого понятия.

Если Вы владеете понятием предела (\lim), то можно дать следующее определение интеграла:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\sum_{n=0}^{\infty} f(x_n) \cdot \Delta x \right), \text{ где } x_n \in [a; b].$$

Докажем теперь, что $S'(x)=f(x)$. Заметим, что $S(a)=0$, $S(b)=S$.

Выберем произвольный аргумент $x \in [a; b]$.



Возьмём теперь прямоугольник такой же площади ΔS , опирающийся на отрезок $[x; x+\Delta x]$.

В силу непрерывности функции f верхняя сторона прямоугольника пересекает график функции в некоторой точке с абсциссой $c \in [x; x+\Delta x]$. Высота прямоугольника равна $f(c)$. По формуле площади прямоугольника имеем:

$$\Delta S = f(c) \cdot \Delta x \Rightarrow f(c) = \frac{\Delta S}{\Delta x}$$

При $\Delta x \rightarrow 0 \Rightarrow c \rightarrow x$ и $f(c) \rightarrow f(x)$, т.е. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta x} = f(x)$ или $S'(x)=f(x)$.

Вы уже знакомы с понятием первообразной функции. Доказанное нами утверждение $S'(x)=f(x)$ в силу основного свойства первообразных для всех $x \in [a;b]$ означает, что:

$$S(x)=F(x)+C,$$

где C – некоторая постоянная, а F – одна из первообразных для функции $f(x)$.

Для нахождения C подставим $x=a$:

$$F(a)+C=S(a)=0$$

$$F(a)=-C.$$

Следовательно, $S(x)=F(x) - F(a)$.

Поскольку площадь криволинейной трапеции равна $S(b)=S$, подставляя $x=b$, получим:

$$S = S(b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx$$

Важно!!! понимать, что значение интеграла может получиться отрицательным (если, например, на заданном промежутке значения функции отрицательны).

Пример 1.
$$\int_{-1}^2 (2x^2 - 4x + 2) dx = \left(\frac{2x^3}{3} - 2x^2 + 2x \right) \Big|_{-1}^2 = \frac{16}{3} - 8 + 4 - \left(-\frac{2}{3} - 2 - 2 \right) = 6$$

Пример 2.
$$\int_0^2 (-4x - 2) dx = (-2x^2 - 2x) \Big|_0^2 = -8 - 4 - 0 = -12$$

Отметим некоторые свойства интеграла (объясните их с помощью учителя):

$$\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx \quad \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx, \text{ где } c \in [a; b]$$

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0, \text{ если } f(x) \text{ – нечётная функция}$$

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx, \text{ если } f(x) \text{ – чётная функция}$$

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx \quad \int_a^b cf(x) dx = c \int_a^b f(x) dx, \text{ где } c \in \square$$

Применение этих свойств часто упрощает вычисление интегралов.

Пример 3. Найти значение интеграла: $\int_{-1,17}^{1,17} (5x^{11} - 7x^7) dx$.

Решение.