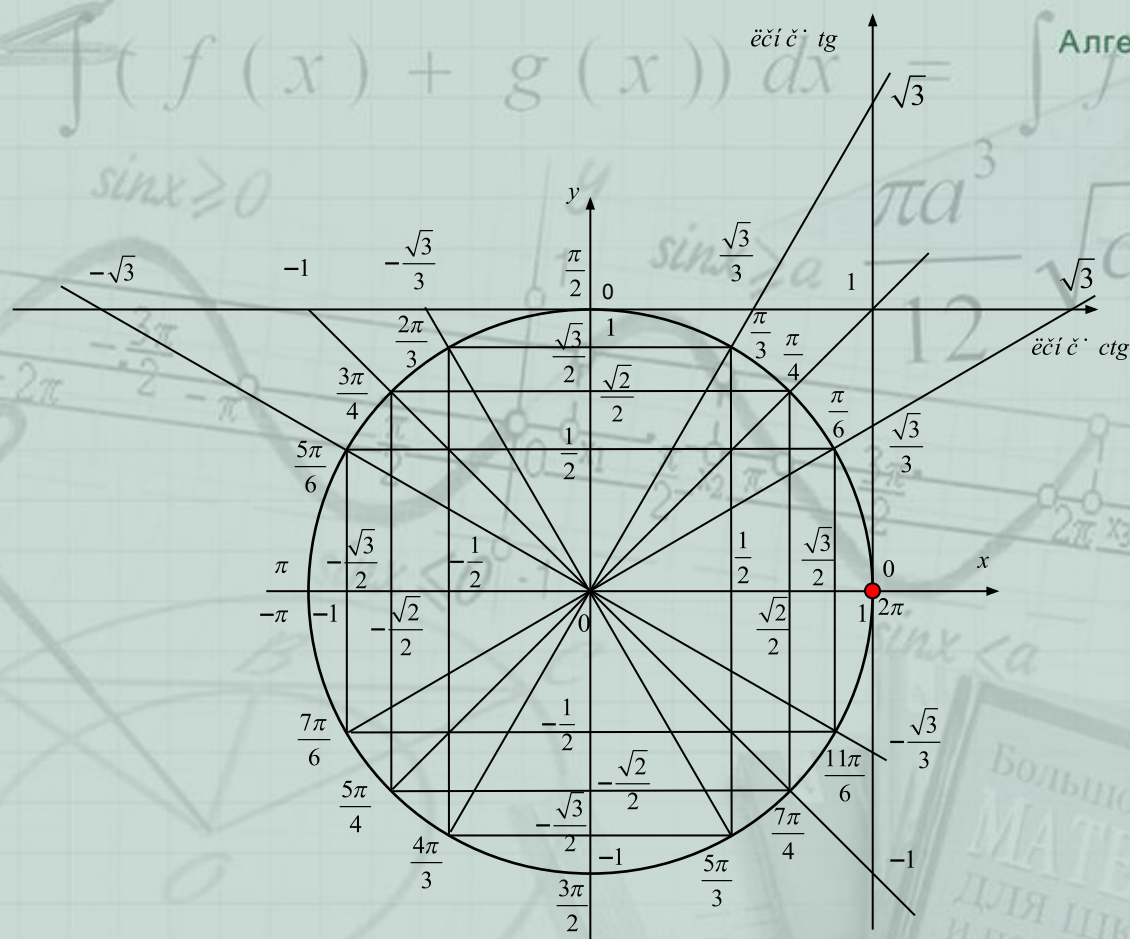




Решение простейших тригонометрических неравенств.

Алгебра и начала анализа, 10 класс.

Под простейшими тригонометрическими неравенствами понимают неравенства вида:

$$\sin t \leq a$$

$$\cos t \leq a$$

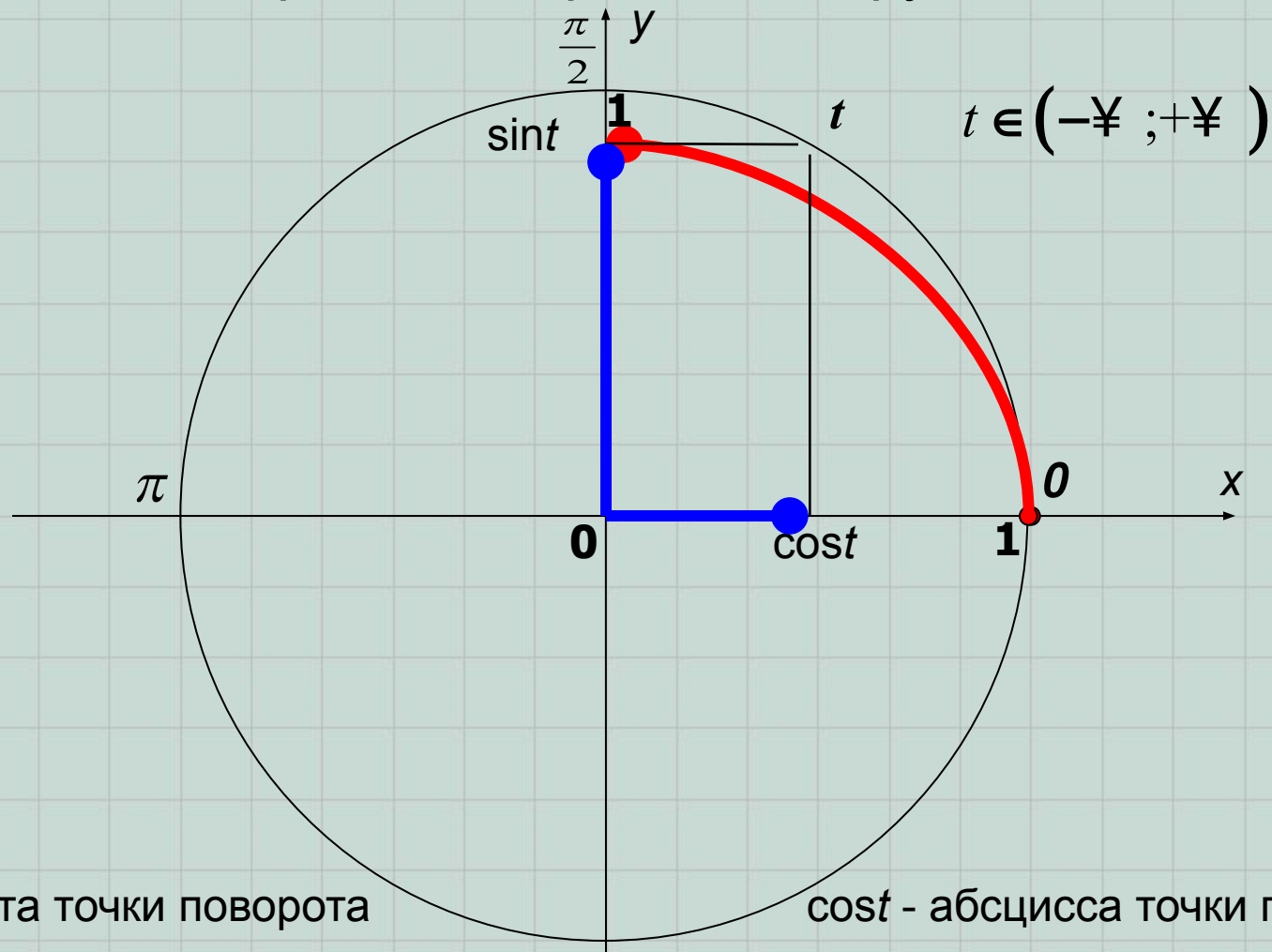
,где t –
выражение с
переменной,
 $a \in \mathbb{R}$.

$$\tan t \leq a$$

$$\cot t \leq a$$

Под знаком “ $\leq$ ” следует понимать любой из четырёх знаков неравенств: $<$, $>$, $\leq$, $\geq$.

Для решения тригонометрических неравенств необходимо уметь работать с тригонометрическим кругом:



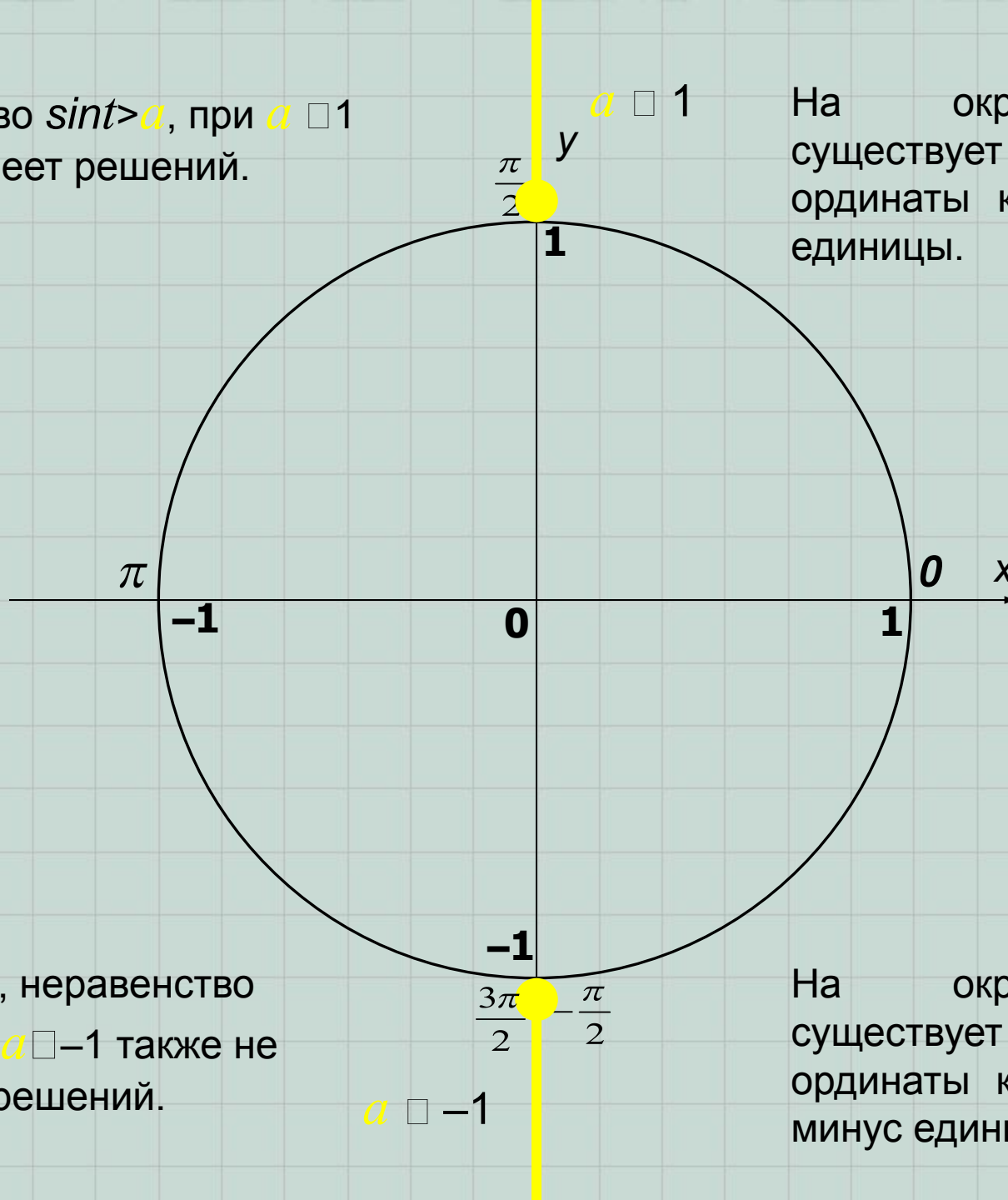
$\sin t$ - ордината точки поворота

$\cos t$ - абсцисса точки поворота

(под «точкой поворота» следует понимать — «точку единичной тригонометрической окружности, полученной при повороте на t радиан от начала отсчета»)

Неравенство $\sin t > a$, при $a \leq 1$
не имеет решений.

На окружности не
существует точек поворота,
ординаты которых больше
единицы.

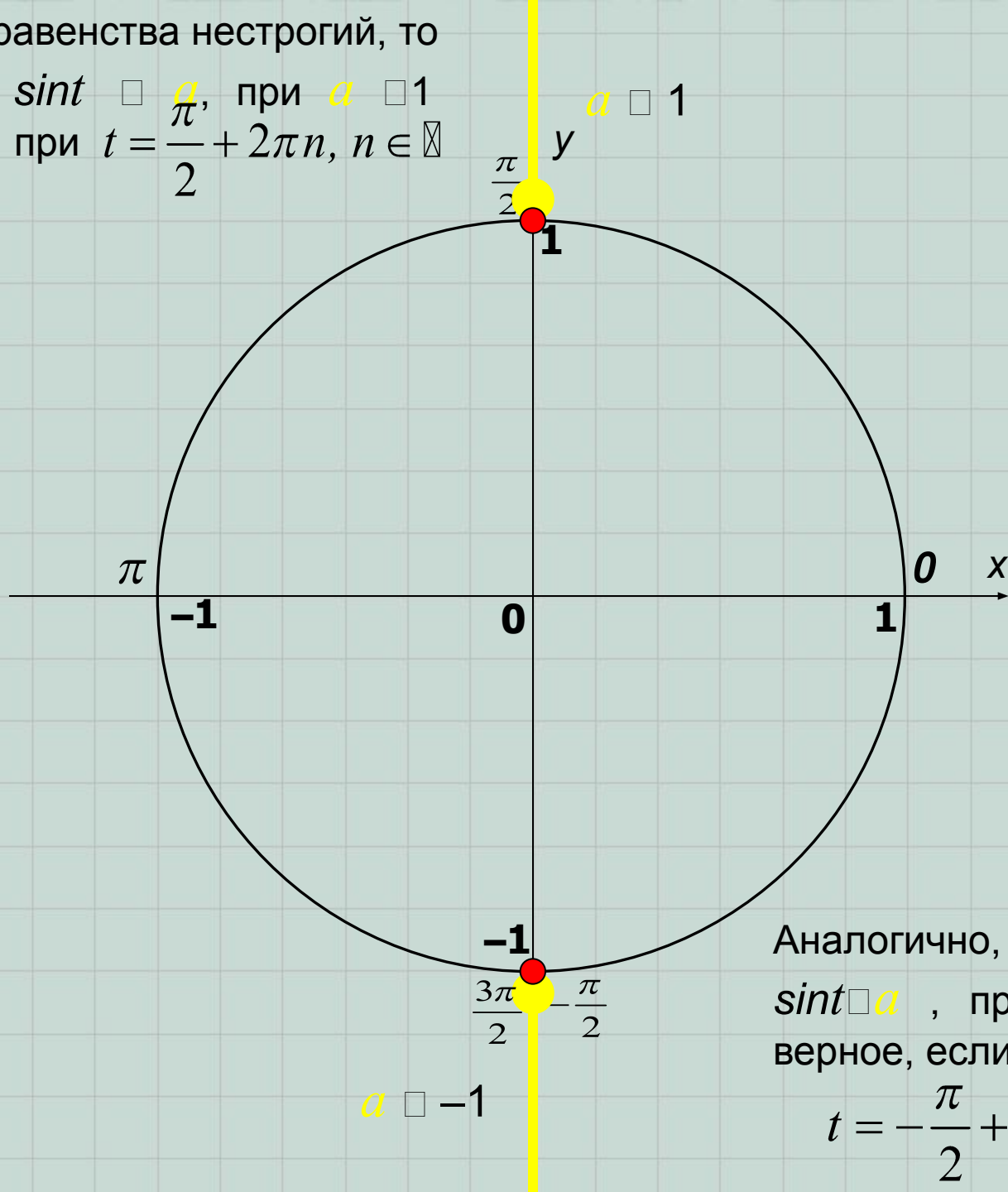


Аналогично, неравенство
 $\sin t < a$, при $a \geq -1$ также не
имеет решений.

На окружности не
существует точек поворота,
ординаты которых меньше
минус единицы.

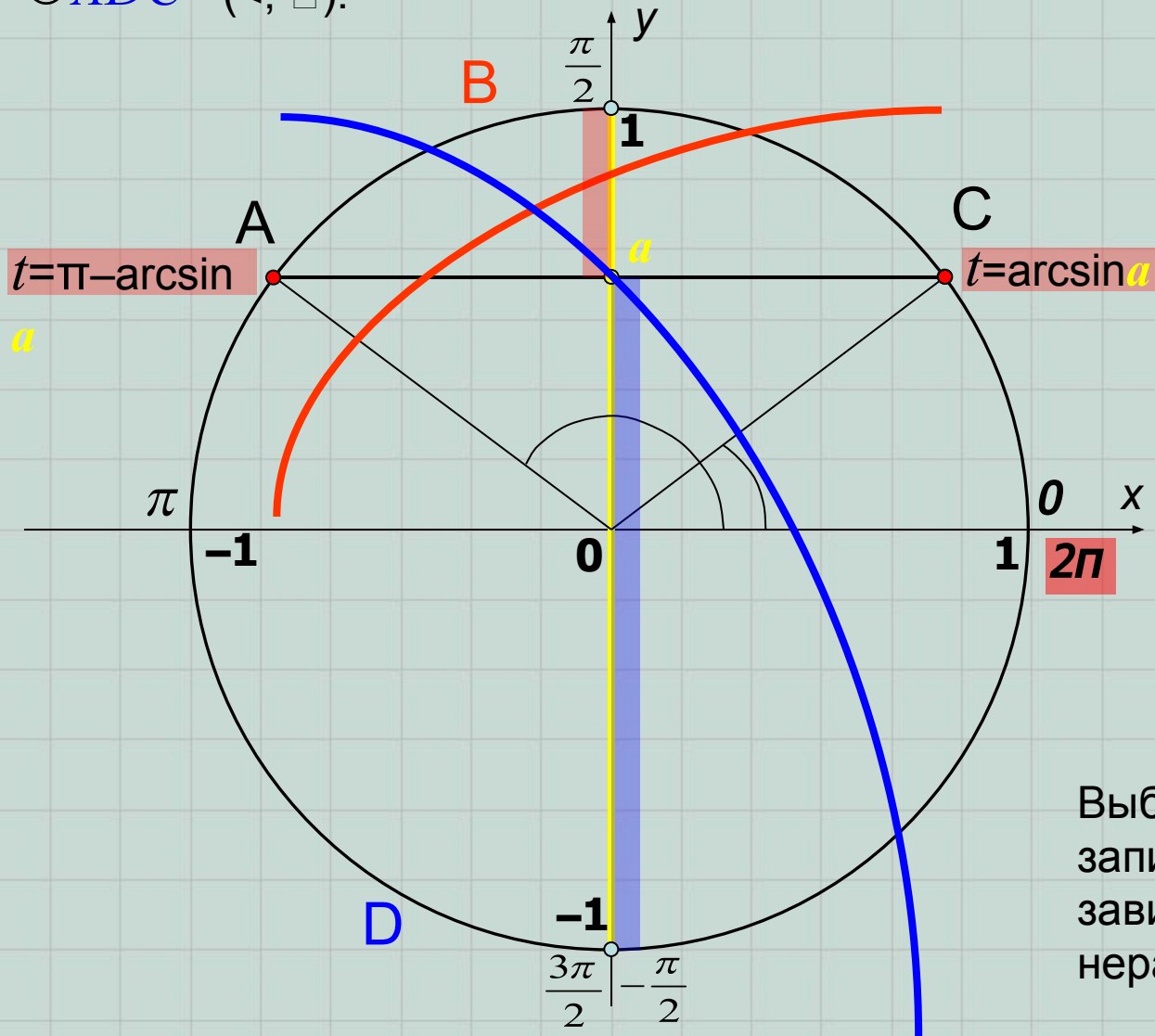
$$a \leq -1$$

Если знак неравенства нестрогий, то
 неравенство $\sin t \leq a$, при $a \leq 1$
 выполняется, при $t = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$



Аналогично, неравенство
 $\sin t \leq a$, при $a \leq -1$ будет
 верное, если
 $t = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

Если $a \in (-1; 1)$, то неравенство $\sin t \square a$ выполняется либо на дуге $\cup CBA$ ($>, \square$),
либо на дуге $\cup ADC$ ($<, \square$).

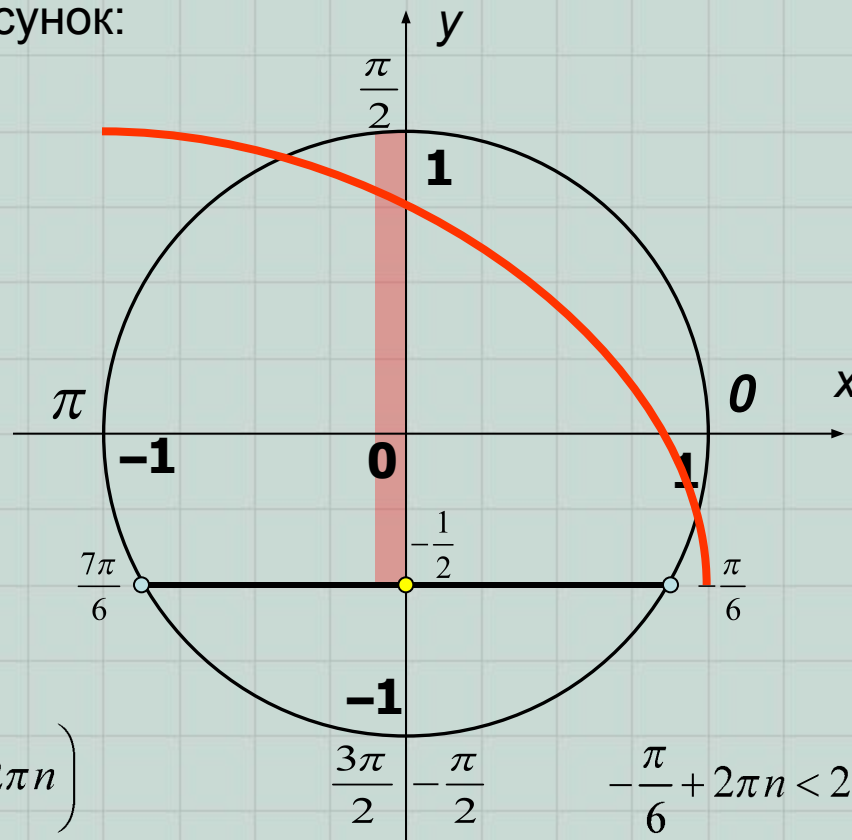


Выбор скобок в
записи ответа
зависит от знака
неравенства

Дугу $\cup CBA$ можно записать в виде промежутка $[(\arcsin a + 2\pi n; \pi - \arcsin a + 2\pi n)]$,
а дугу $\cup ADC$ – в виде промежутка $[(\pi - \arcsin a + 2\pi k; \arcsin a + 2\pi + 2\pi k)]$, $k \in \square$,

Пример. Решите неравенство $\sin(2x-3) > -0,5$.

Решение. Выполняем рисунок:



$$(2x-3) \in \left(-\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{7\pi}{6} + 2\pi n\right)$$

$$2x \in \left(-\frac{\pi}{6} + 2\pi n + 3; \frac{7\pi}{6} + 2\pi n + 3\right)$$

$$x \in \left(-\frac{\pi}{12} + \frac{3}{2} + \pi n; \frac{7\pi}{12} + \frac{3}{2} + \pi n\right), n \in \mathbb{Z}$$

или

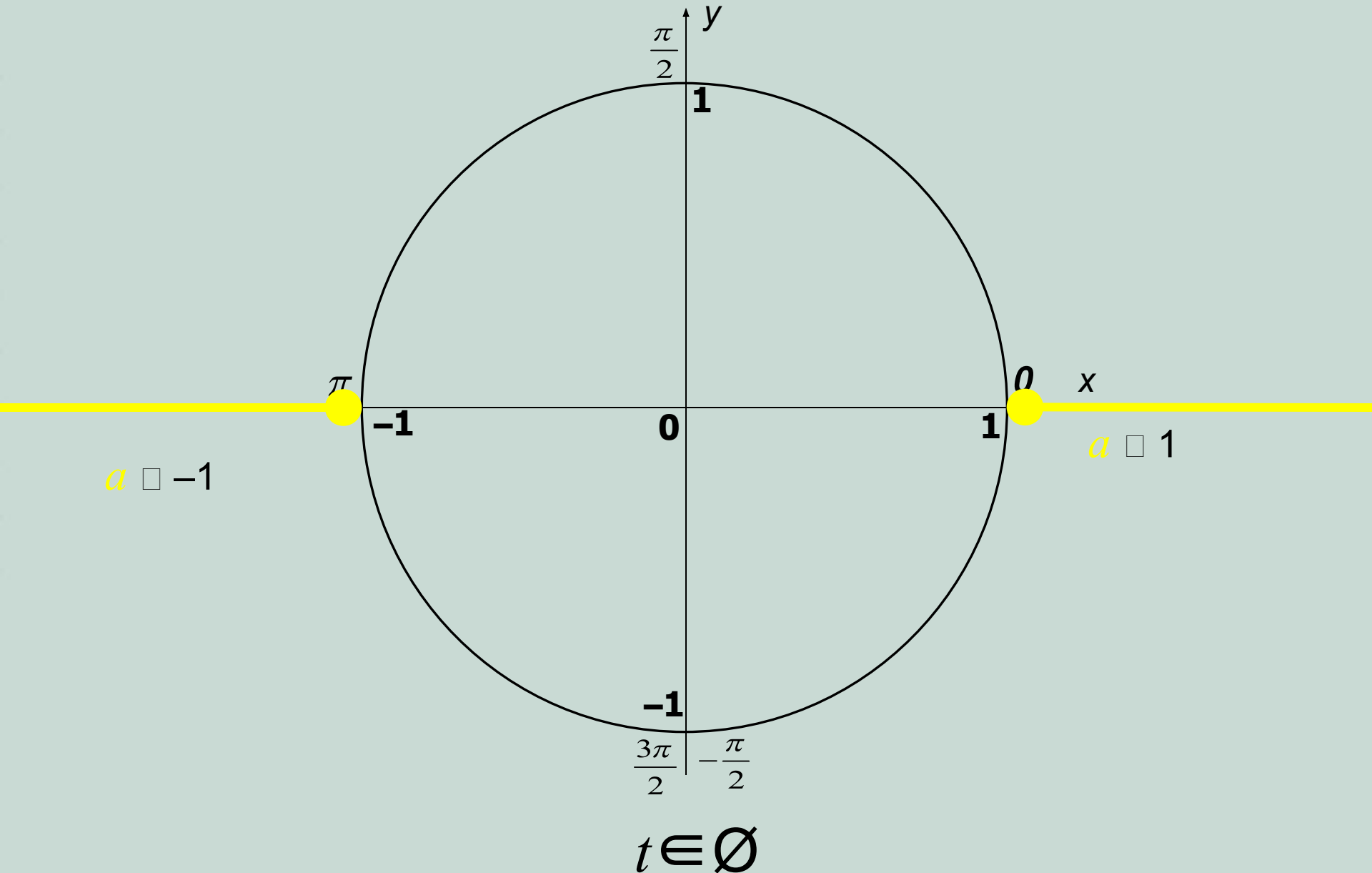
$$-\frac{\pi}{6} + 2\pi n < 2x-3 < \frac{7\pi}{6} + 2\pi n$$

$$-\frac{\pi}{6} + 2\pi n + 3 < 2x < \frac{7\pi}{6} + 2\pi n + 3$$

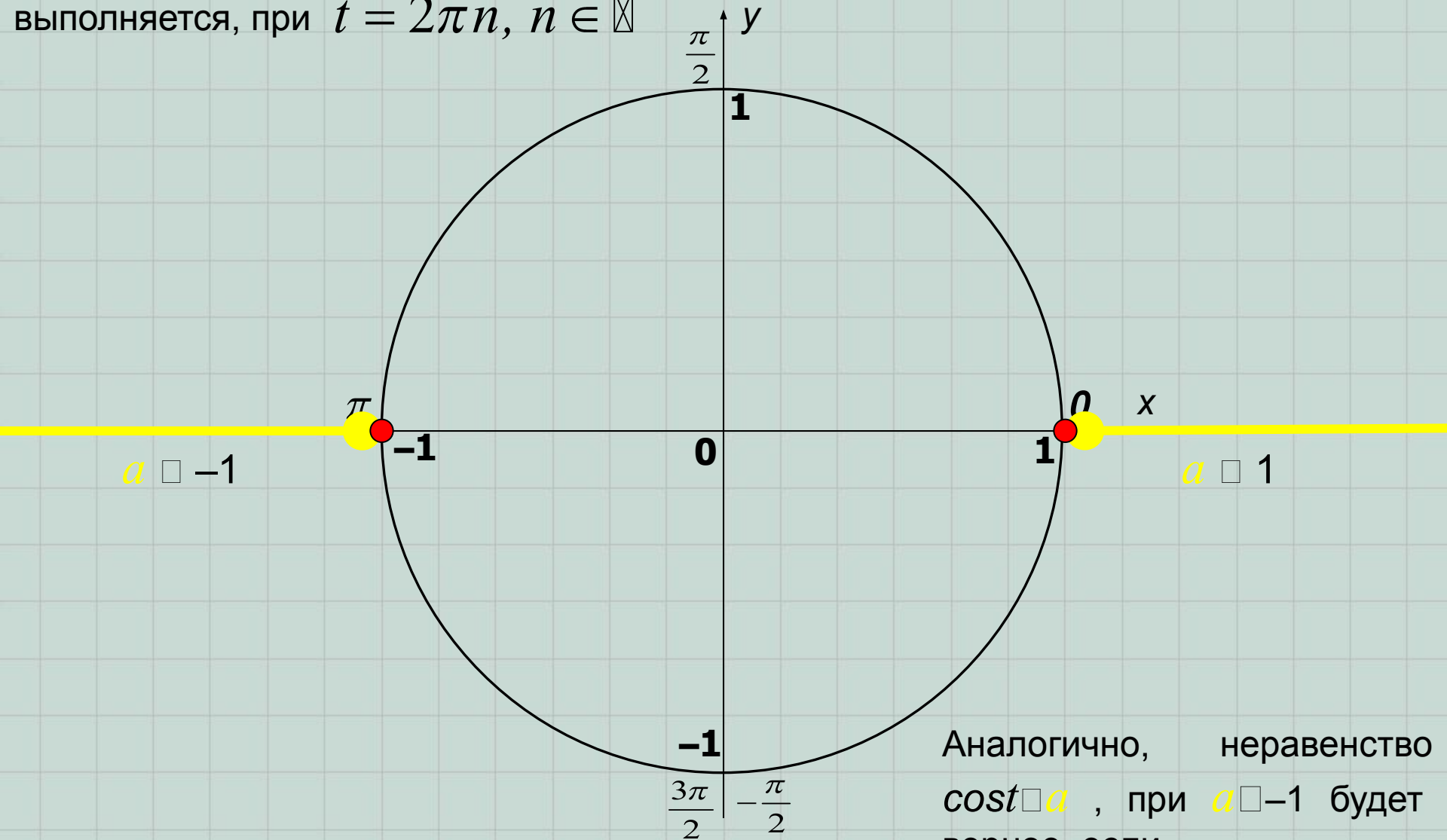
$$-\frac{\pi}{12} + \frac{3}{2} + \pi n < x < \frac{7\pi}{12} + \frac{3}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $x \in \left(-\frac{\pi}{12} + \frac{3}{2} + \pi n; \frac{7\pi}{12} + \frac{3}{2} + \pi n\right), n \in \mathbb{Z}.$

Для неравенство $\cos t > a$, при $a \leq 1$ и $\cos t < a$, при $a \leq -1$ проведите рассуждения самостоятельно (под руководством учителя).



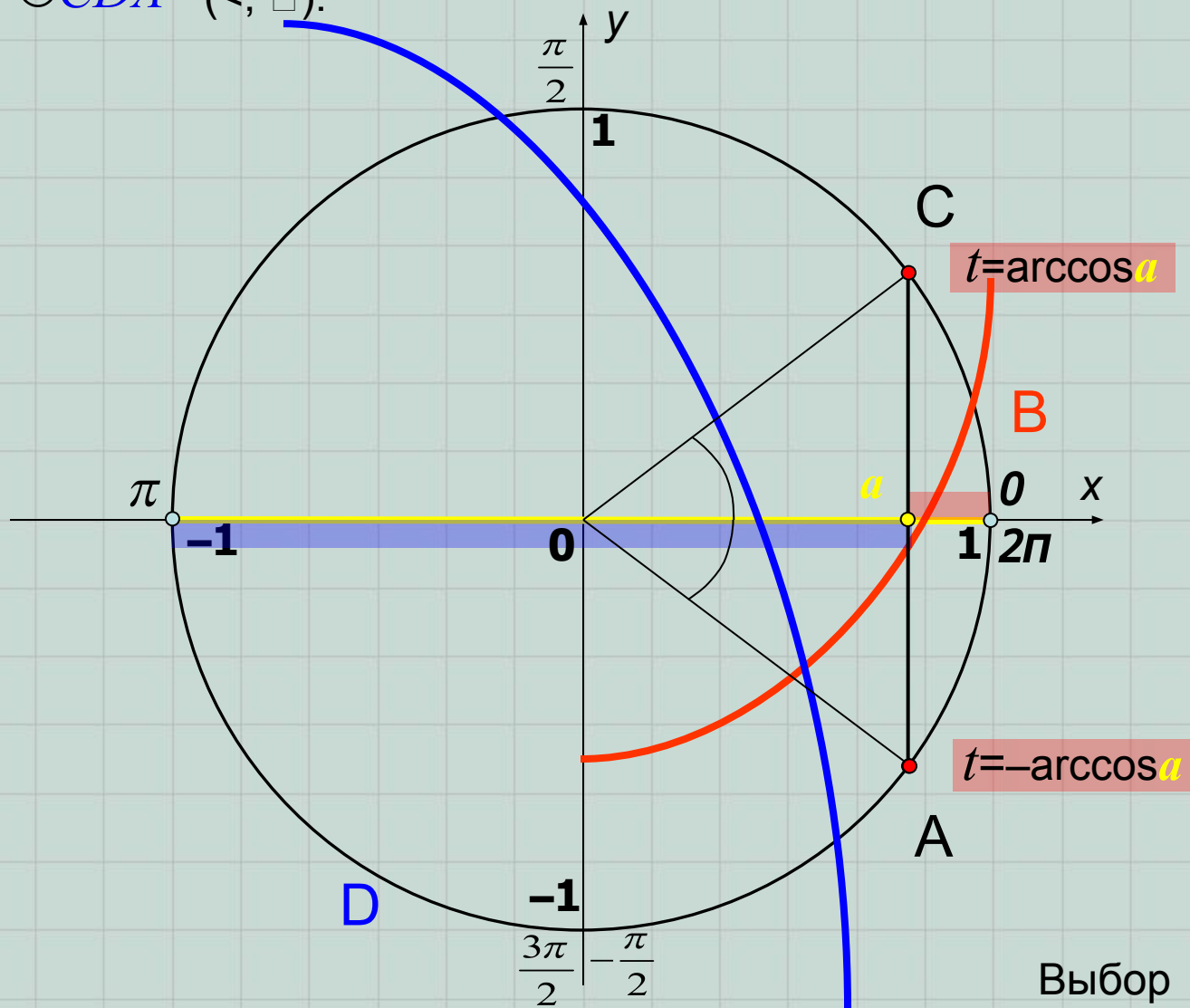
Если знак неравенства нестрогий, то
 неравенство $\cos t \geq a$, при $a \leq 1$
 выполняется, при $t = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$



Аналогично, неравенство
 $\cos t \leq a$, при $a \geq -1$ будет
 верное, если

$$t = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Если $a \in (-1; 1)$, то неравенство $\cos t \square a$ выполняется либо на дуге $\cup ABC$ ($>$, $\square$),
либо на дуге $\cup CDA$ ($<$, $\square$).



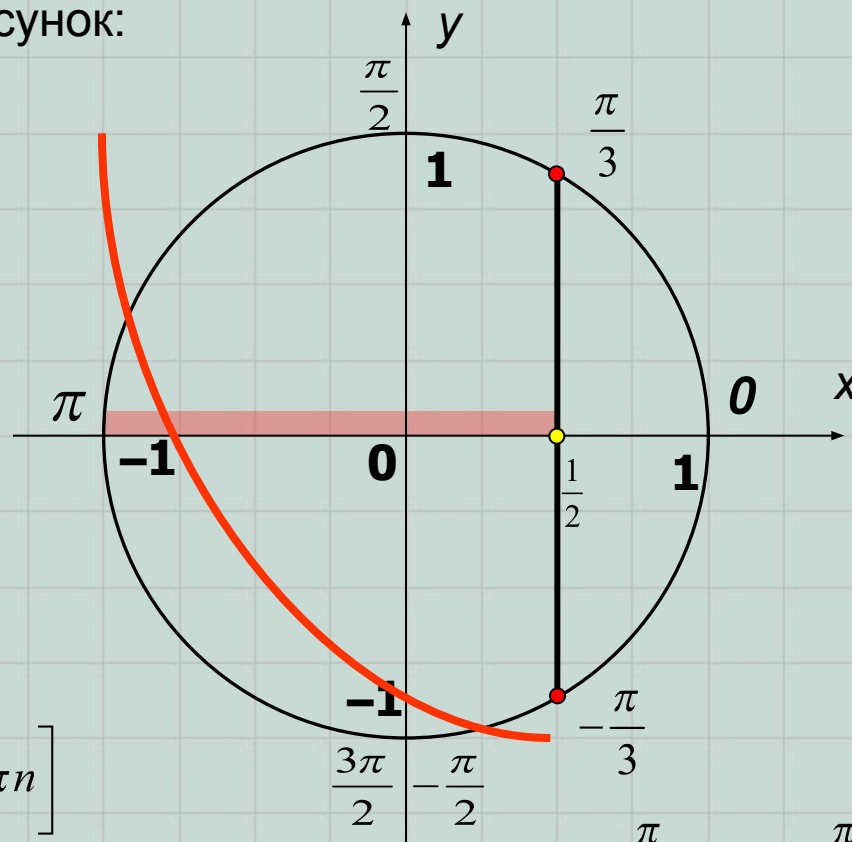
В первом случае $t \in \left([-\arccos a + 2\pi n; \arccos a + 2\pi n] \right), n \in \mathbb{Z}$

Во втором, $t \in \left([\arccos a + 2\pi k; 2\pi - \arccos a + 2\pi k] \right), k \in \mathbb{Z}$

Выбор скобок в
записи ответа
зависит от знака
неравенства

Пример. Решите неравенство $\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) \geq \frac{1}{2}$.

Решение. Выполняем рисунок:



$$\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) \in \left[\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{5\pi}{3} + 2\pi n\right]$$

$$-\frac{x}{2} \in \left[-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} + 2\pi n; -\frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{3} + 2\pi n\right]$$

$$x \in \left[-\frac{17\pi}{6} + 4\pi n; -\frac{\pi}{6} + 4\pi n\right], n \in \mathbb{Z}$$

или

$$\frac{\pi}{3} + 2\pi n \leq \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \leq \frac{5\pi}{3} + 2\pi n$$

$$\frac{\pi}{3} + 2\pi n - \frac{\pi}{4} \leq -\frac{x}{2} \leq \frac{5\pi}{3} + 2\pi n - \frac{\pi}{4}$$

$$-\frac{17\pi}{6} + 4\pi n \leq x \leq -\frac{\pi}{6} + 4\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $x \in \left[-\frac{17\pi}{6} + 4\pi n; -\frac{\pi}{6} + 4\pi n\right], n \in \mathbb{Z}.$

Так как $E(\operatorname{tg})=\mathbb{R}$, то неравенство $\operatorname{tg} t \leq a$ всегда имеет решение.

Значению $\operatorname{tg} t = a$ соответствуют числа t (величины углов поворота в радианной мере), попадающие в две точки тригонометрического круга.

Для неравенств $\operatorname{tg} t > a$ или $\operatorname{tg} t \leq a$ получаем две дуги.

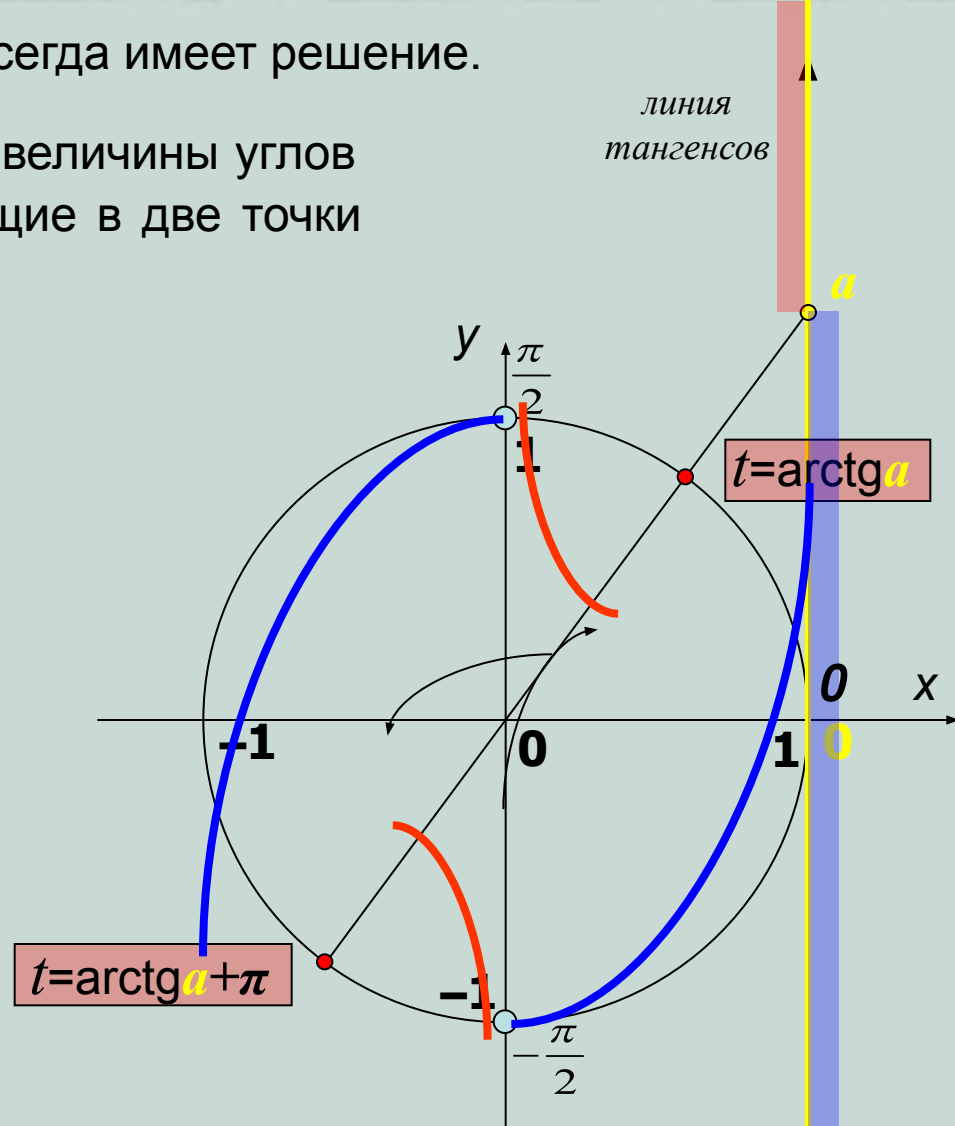
Обе они могут быть записаны в виде промежутка:

$$t \in \left[\left(\operatorname{arctg} a + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n \right) \right), n \in \mathbb{Z}$$

Для неравенств $\operatorname{tg} t < a$ или $\operatorname{tg} t \geq a$ получаем две дуги.

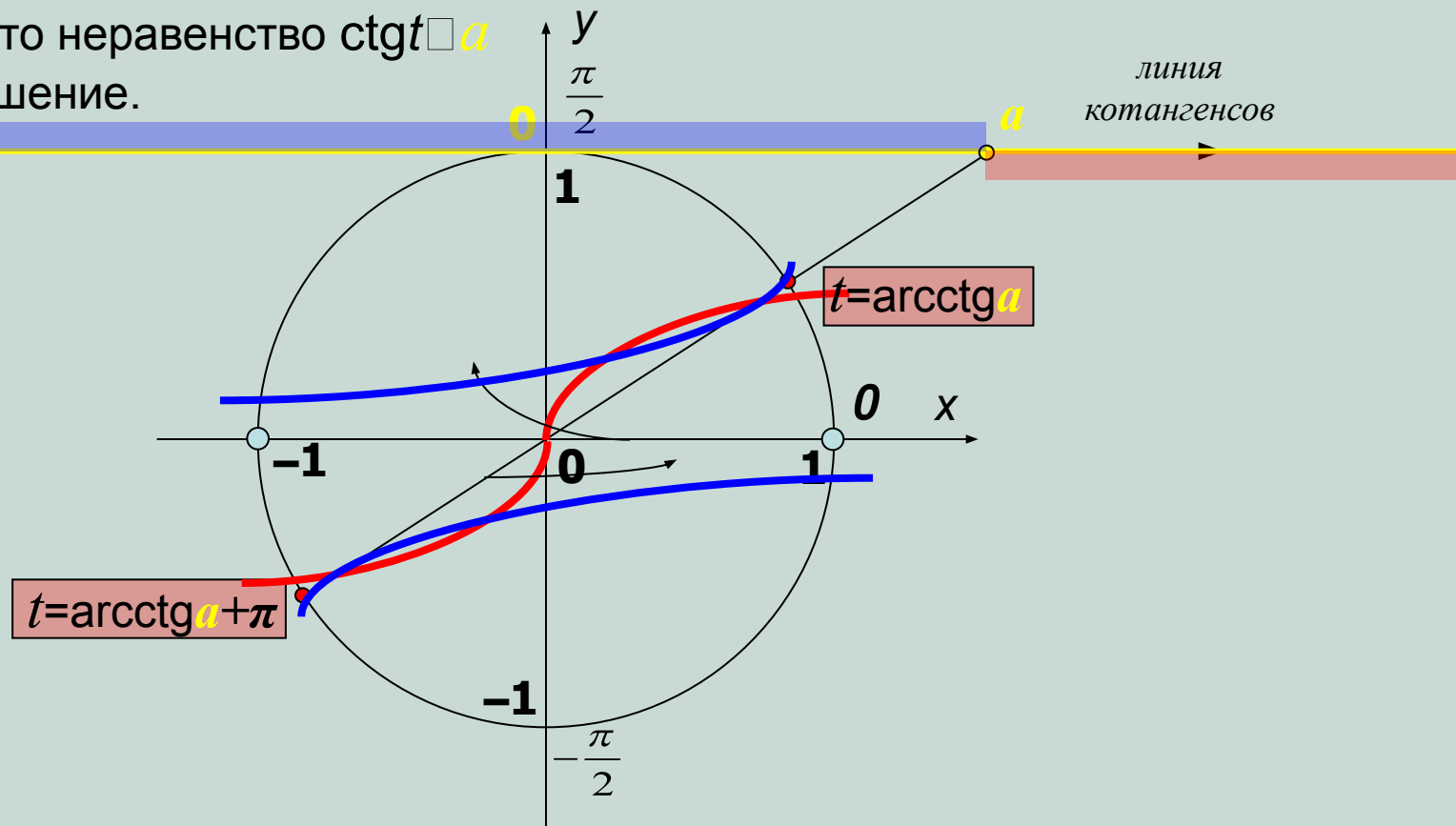
Обе они могут быть записаны в виде промежутка:

$$t \in \left(\left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \operatorname{arctg} a + \pi k \right) \right], k \in \mathbb{Z}$$



Выбор скобок в записи ответа зависит от знака неравенства

Так как $E(tg)=\mathbb{R}$, то неравенство $ctgt \square a$ всегда имеет решение.



Проследите за ходом решения и выведите общие формулы для неравенств:

$$ctgt > a$$

$$t \in (\pi n; \text{arccctg } a + \pi n), n \in \mathbb{Z}$$

$$ctgt < a$$

$$t \in (\text{arccctg } a + \pi n; \pi + \pi n), n \in \mathbb{Z}$$

$$ctgt \square a$$

$$t \in (\pi n; \text{arccctg } a + \pi n], n \in \mathbb{Z}$$

$$ctgt \square a$$

$$t \in [\text{arccctg } a + \pi n; \pi + \pi n), n \in \mathbb{Z}$$

Пример. Решите неравенство $\frac{\operatorname{tg}(2x) - \operatorname{tg} 3}{1 + \operatorname{tg}(2x) \cdot \operatorname{tg} 3} \dots \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Решение. Применив к левой части неравенства формулу тангенса разности, получим равносильное неравенство:

$$\operatorname{tg}(2x - 3) \dots \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Выполняем рисунок.

Получаем:

$$\frac{\pi}{6} + \pi n, \quad 2x - 3 < \frac{\pi}{2} + \pi n;$$

$$\frac{\pi}{6} + \pi n + 3, \quad 2x < \frac{\pi}{2} + \pi n + 3;$$

$$\frac{\pi}{12} + \frac{3}{2} + \frac{\pi n}{2}, \quad x < \frac{\pi}{4} + \frac{3}{2} + \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $x \in \left[\frac{\pi}{12} + \frac{3}{2} + \frac{\pi n}{2}; \frac{\pi}{4} + \frac{3}{2} + \frac{\pi n}{2} \right), \quad n \in \mathbb{Z}.$

