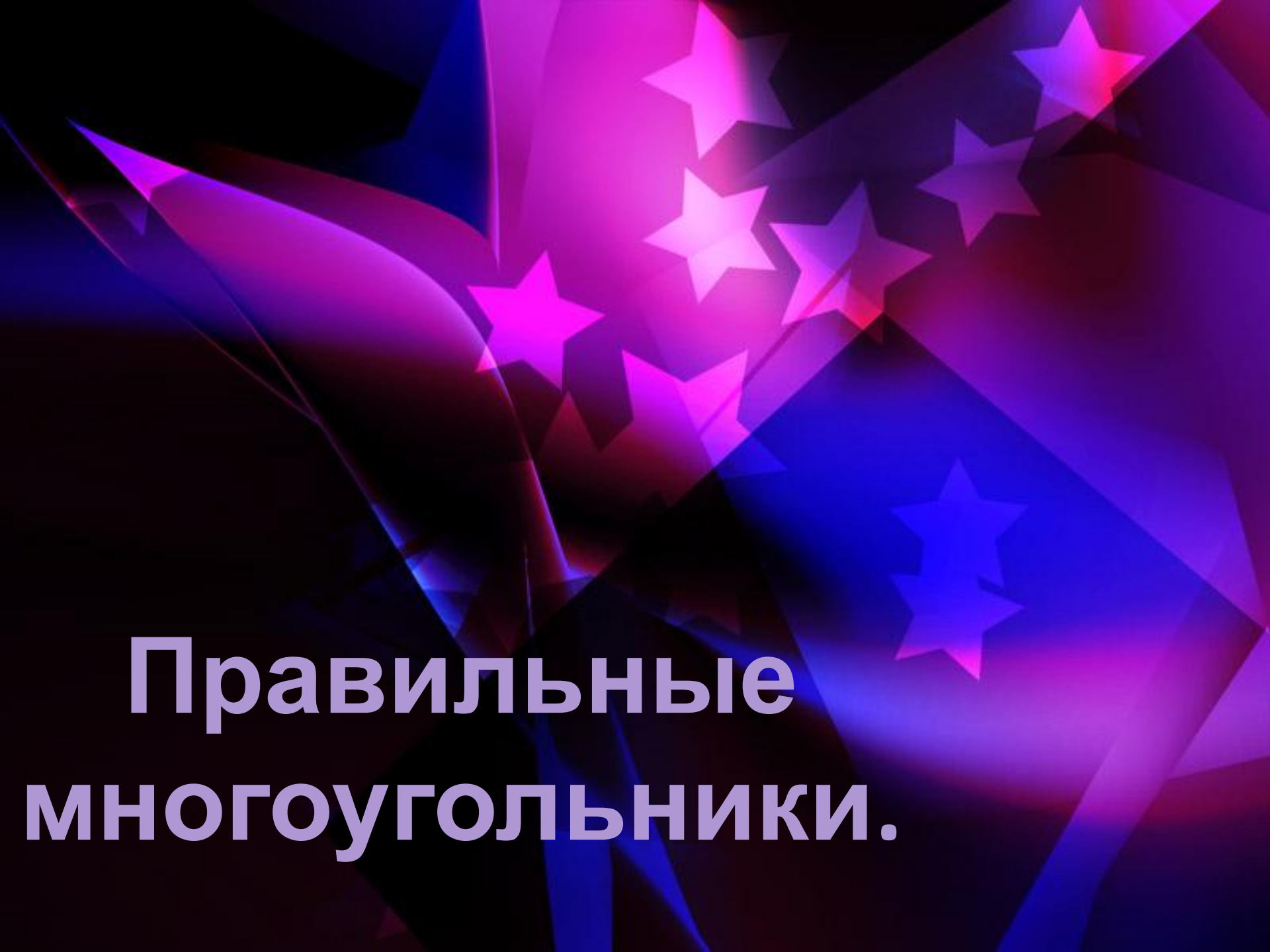
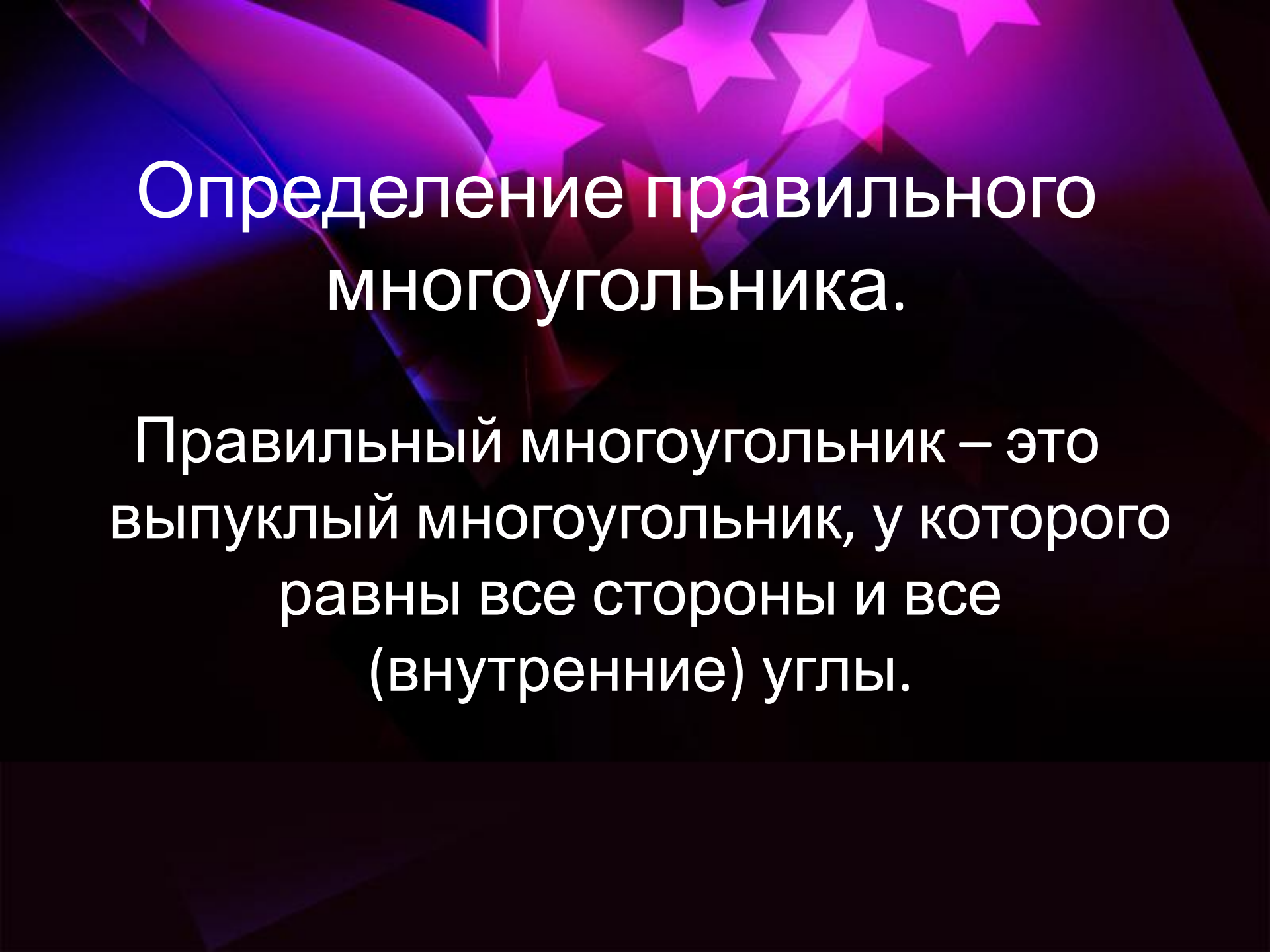




**Правильные
многоугольники.**



Определение правильного многоугольника.

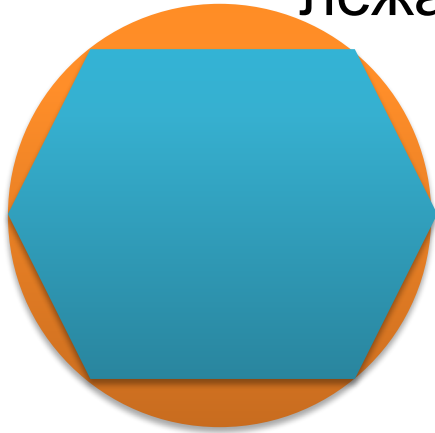
Правильный многоугольник – это
выпуклый многоугольник, у которого
равны все стороны и все
(внутренние) углы.

Формула для вычисления угла
правильного n-угольника.

$$\alpha_n = \frac{n-2}{n} \times 180^\circ$$

Окружность, описанная около правильного многоугольника.

Окружность называется описанной около многоугольника, если все его вершины лежат на этой окружности.



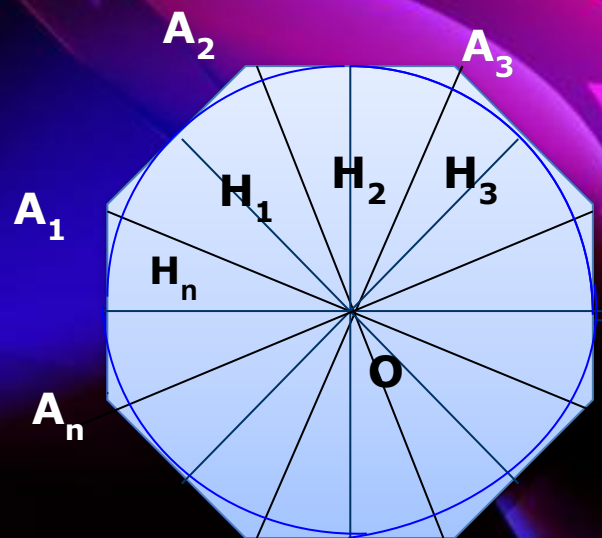
Теорема: около любого правильного многоугольника можно описать окружность, и притом только одну.

Окружность, вписанная в правильный многоугольник.

Окружность называется вписанной в многоугольник, если все стороны многоугольника касаются этой окружности.



Теорема: В любой правильный многоугольник можно вписать окружность, и притом только одну.

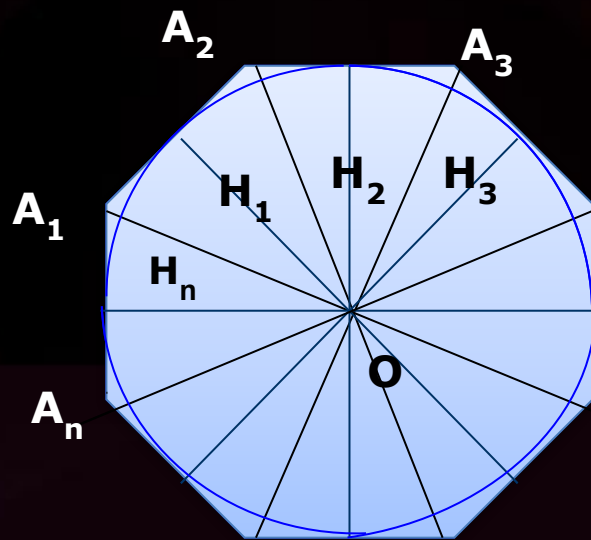


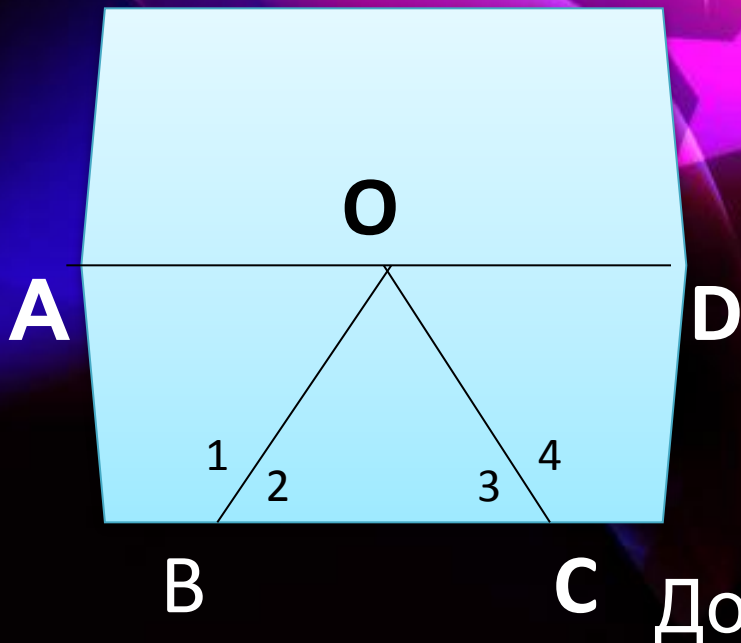
Дано: $ABCD \dots A_n$ -
правильный
многоугольник.

Доказать: в любой
правильный многоугольник
можно вписать окружность,
и притом только одну.

Пусть $A_1 A_2 \dots A_n$ - правильный многоугольник, O –
центр описанной окружности. При доказательстве
теоремы 1 мы выяснили, что $\triangle OA_1 A_2 = \triangle OA_2 A_3 =$
 $\triangle OA_n A_1$, поэтому высоты этих треугольников,
проведённые из вершины O , также равны.
Поэтому окружность с центром O и радиусом OH
проходит через точки H_1, H_2, H_n и касается
сторон многоугольника в этих точках, т.е.
окружность вписана в данный многоугольник.

Докажем, что вписанная окружность только одна. Предположим, что существует другая вписанная окружность с центром O и радиусом OA . Тогда её центр равноудалён от сторон многоугольника, т.е. точка O_1 лежит на каждой из биссектрис углов многоугольника, и поэтому совпадает с точкой O пересечения этих биссектрис.



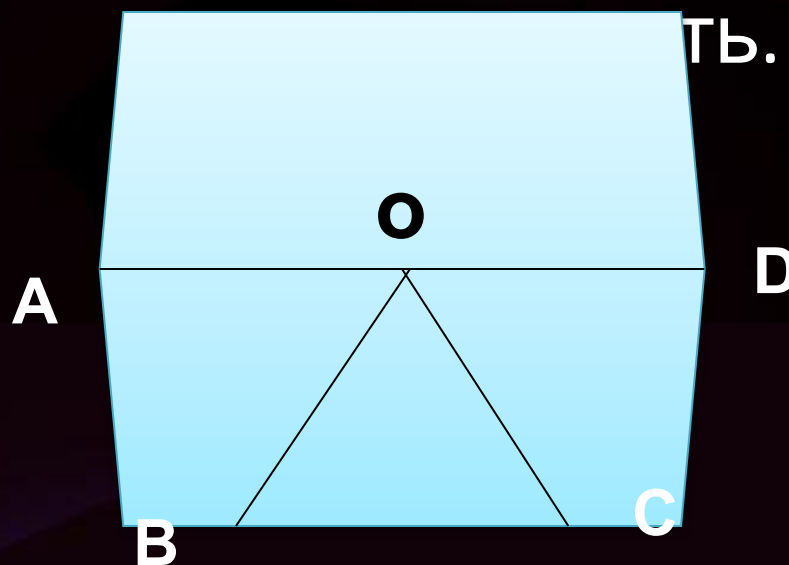


Дано: $ABCD \dots A_n$ -
правильный многоугольник.
Доказать: около любого
правильного
многоугольника можно
провести окружность, и
притом только одну.

Доказательство:

Проведём биссектрисы BO и CO равных углов ABC и BCD . Они равнобедренны, так как $BO = CO$ (радиусы правильного многоугольника). $\angle BOC = 180^\circ - \angle B$. Пусть точка их пересечения — O , тогда $BO = CO$. Проведём AO и DO , тогда $AO = DO$ (радиусы). Тогда $\triangle ABO \cong \triangle DCO$ (по двум сторонам и углу между ними). Тогда $\angle AOB = \angle DOC$. Тогда $\angle AOC = \angle BOD$ (вертикальные углы). Тогда $\triangle AOC \cong \triangle BOD$ (по двум сторонам и углу между ними). Тогда $AO = BO = CO = DO$. Тогда O — центр окружности, описанной около многоугольника. $\angle AOB = \angle BOC = \dots = \angle A_n O A_1$.

Докажем теперь, что описанная окружность только одна. Рассмотрим какие-нибудь три вершины многоугольника, например A, B, C . Т.к. через эти точки проходит только одна окружность, то около многоугольника $ABC...A_n$ можно описать только одну



Следствия Я.

Следствие №1

Окружность, вписанная в правильный многоугольник, касается сторон многоугольника в их серединах.

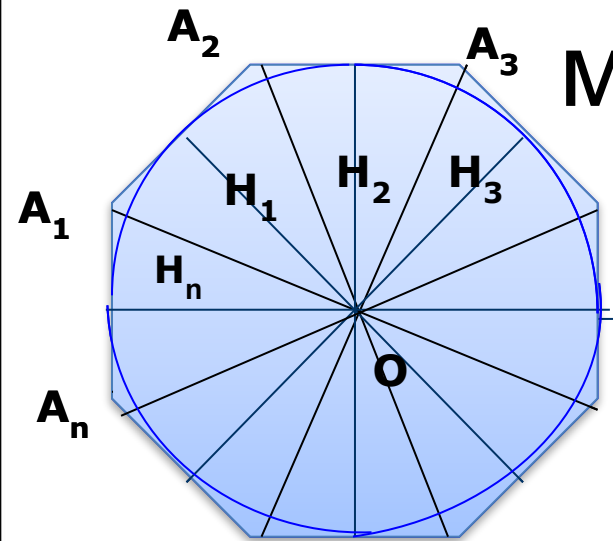


Следствие №2

Центр окружности, описанной около правильного многоугольника, совпадает с центром окружности, вписанной в тот же многоугольник.

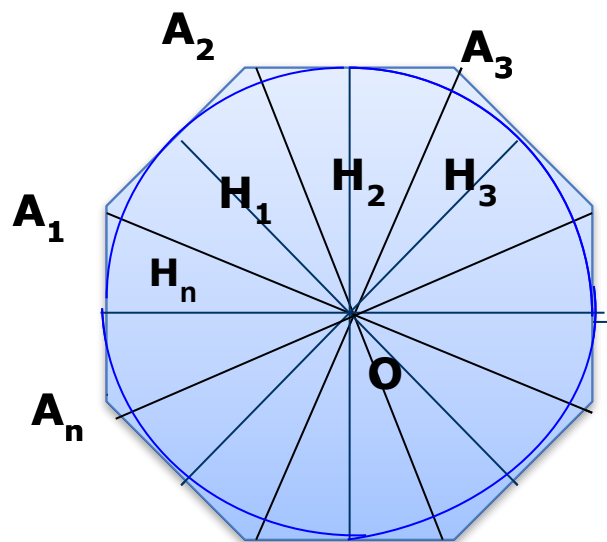


Формула для вычисления площади правильного многоугольника.



Пусть S – площадь правильного n -угольника, a_1 – его сторона, P – периметр, а r и R – радиусы соответственно вписанной и описанной окружностей. Докажем, что

$$S = \frac{1}{2} Pr$$



Для этого, соединим центр данного многоугольника с его вершинами. Тогда многоугольник разобьется на n равных треугольников, площадь каждого из которых равна $\frac{1}{2} a_n r$

Следовательно,

$$S = n \times \frac{1}{2} a_n r = \frac{1}{2} (n a_n) r = \frac{1}{2} Pr$$

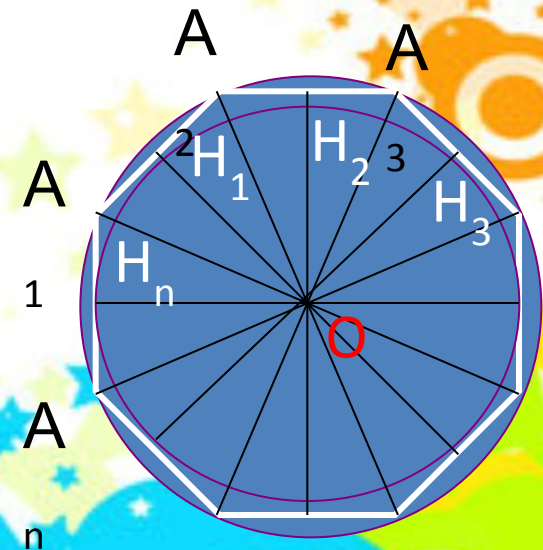
Формула для вычисления стороны правильного многоугольника.

Выведем формулы:

$$a_n = 2R \sin \frac{180^\circ}{n} \quad r = R \cos \frac{180^\circ}{n}$$

Для вывода этих формул воспользуемся рисунком. В прямоугольном треугольнике $A_1 H_1 O$

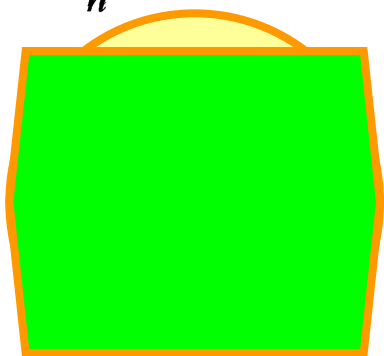
$$\angle A_1 = \frac{\alpha_n}{2} = \frac{180^\circ}{2n} \times 180^\circ = 90^\circ - \frac{180^\circ}{n}$$

$$r = OH_1 = R \sin \left(90^\circ - \frac{180^\circ}{n} \right) = R \cos \frac{180^\circ}{n}$$


$$a_n = 2R \sin \frac{180^\circ}{n}$$

Полагая в формуле $n = 3, 4$ и 6 , получим выражения для сторон правильного треугольника, квадрата и правильного шестиугольника:

$$a_n \equiv 2R \sin \frac{180^\circ}{n} \equiv 2R \sin 30^\circ \equiv 2R \times \frac{\sqrt{3}}{2} = R\sqrt{3}$$



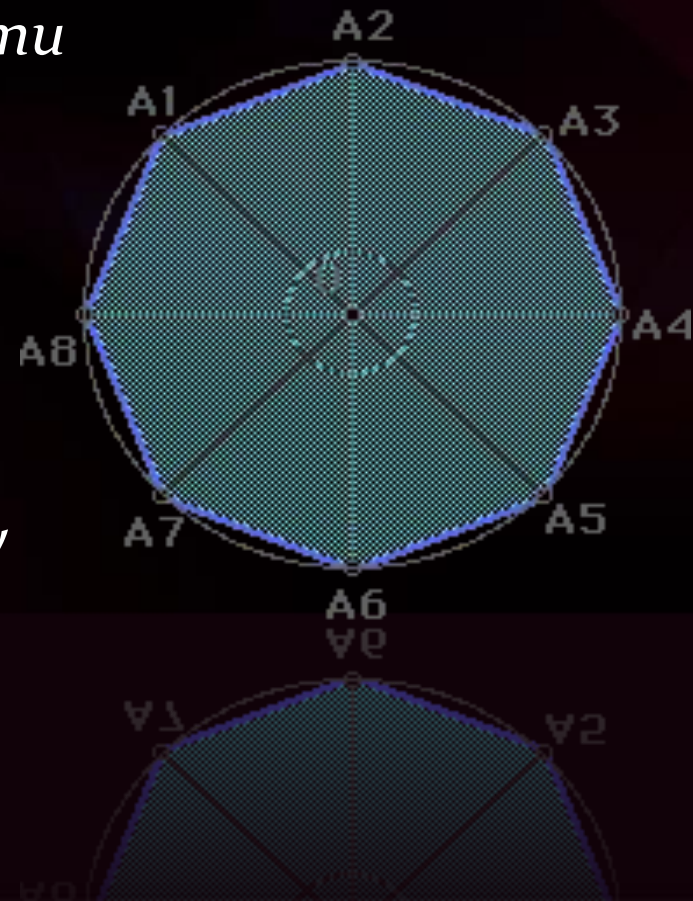
Построение правильных многоугольников.

Задача №1

Дано: окружность (O ; R)

Построить правильный n - угольник.

1. окружность разделим на n равных дуг. Для этого проведем радиусы $OA_1, OA_2, \dots, OA_n$ этой окружности так, чтобы угол $A_1OA_2 = \text{угол } A_2OA_3 = \dots = \text{угол } A_{n-1}OA_n = \text{угол } A_nOA_1 = 360^\circ/n$ (на рисунке $n=8$).
2. Если теперь провести отрезки $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n, A_nA_1$, то получим n - угольник $A_1A_2 \dots A_n$. Треугольники $A_1OA_2, A_2OA_3, \dots, A_nOA_1$ равны друг другу, поэтому $A_1A_2 = A_2A_3 = \dots = A_{n-1}A_n = A_nA_1$. Отсюда следует, что $A_1A_2 \dots A_n$ - правильный n - угольник.



Задача №2

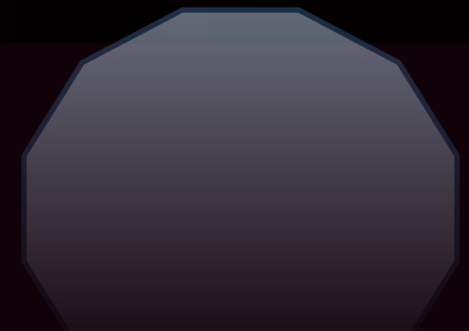
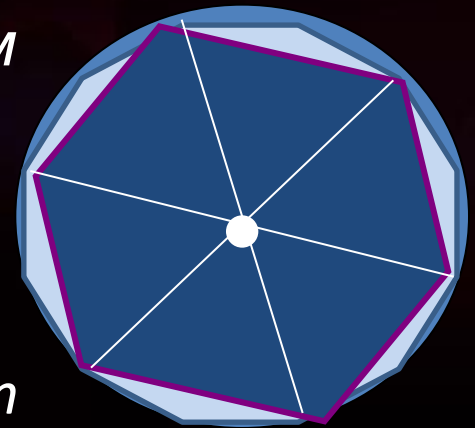
Дано: $A_1, A_2 \dots A_n$ - правильный n - угольник

Построить правильный $2n$ -угольник

Решение.

1. Опишем около него окружность. Для этого построим биссектрисы углов A_1 и A_2 и обозначим буквой O точку их пересечения.
2. Затем проведем окружность с центром O радиуса OA_1 .
3. Разделим дуги $A_1A_2, A_2A_3 \dots, A_n A_1$ пополам
4. Каждую из точек деления $B_1, B_2, \dots, B_n$ соединим отрезками с концами соответствующей дуги.
5. Для построения точек $B_1, B_2, \dots, B_n$ можно воспользоваться серединным перпендикулярами к сторонам данного n - угольника.

На рисунке таким способом построен правильный двенадцатиугольник $A_1 B_1 A_2 B_2 \dots A_6 B_6$.



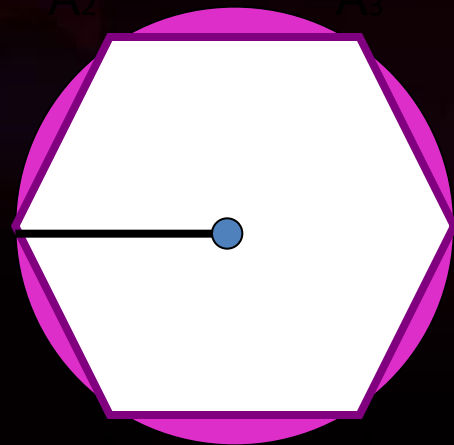
Задача №3

Дано: отрезок PQ .

Построить правильный шестиугольник, сторона которого равна данному отрезку.

Решение:

1. Построим окружность $(O; PQ)$ и отметим на ней произвольную точку A_1
2. Не меняя раствора циркуля, построим на этой окружности точки A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 так, чтобы выполнялись равенства $A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = A_4A_5 = A_5A_6$.
3. Соединяя последовательно построенные точки отрезками, получим искомый правильный шестиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$.



1.Любой правильный многоугольник является выпуклым

2.Любой выпуклый многоугольник является правильным

3.Многоугольник является правильным, если он выпуклый и все его стороны равны

4.Треугольник является правильным, если все его углы равны

5.Любой равносторонний треугольник является правильным

6.Любой четырехугольник с равными сторонами является правильным

7.Любой правильный четырехугольник является квадратом

1	ДА 	НЕТ 
2	ДА 	НЕТ 
3	ДА 	НЕТ 
4	ДА 	НЕТ 
5	ДА 	НЕТ 
6	ДА 	НЕТ 
7	ДА 	НЕТ 



ПРАВИЛЬНО



НЕПРАВИЛЬНО



**ПРЕЗЕНТАЦИЮ
ВЫПОЛНИЛИ
УЧЕНИЦЫ 9А КЛАССА:**

**МЫЛКО СЕРЖО
АДРИАНОВИЧ**