

*Семинар-практикум*  
*Расстояние между*  
*скрещивающимися прямыми*

*Зубарева Т.В.,*  
*учитель математики*  
*Темниковской СОШ №1*

# Цели:

- Систематизация и обобщение приемов работы с пространственными объектами: прямыми, плоскостями и телами
- Знакомство с новым понятием: расстояние между скрещивающимися прямыми
- Усвоение и отработка общих приемов определения расстояний между скрещивающимися прямыми

# Задачи:

- Устная работа по актуализация необходимых известных приемов работы с пространственными объектами: прямыми и плоскостями
- Определение нового понятия: расстояние между скрещивающимися прямыми
- Решение типовых задач на определение расстояний между скрещивающимися прямыми
- Решение проблемной задачи на обобщение приема нахождения

# Средства:

- *Модели пространственных фигур, чертежи к задачам*
- *Теорема Фалеса и теорема о трех перпендикулярах*
- *Приемы стерео и планиметрических построений*
- *Типовые и проблемные задачи*
- *Компьютер с мультимедийным проектором*

# План:

- *Первый урок:*
  - *Актуализация: выполнение устных заданий, доказательство теоремы, решение задачи*
  - *Определение и усвоение нового понятия*
- *Второй урок . Решение типовых задач на усвоение и отработку нового понятия*
- *Третий урок. Проблемная задача на обобщение приема нахождения расстояния между двумя скрещивающимися прямыми*

# Первый урок

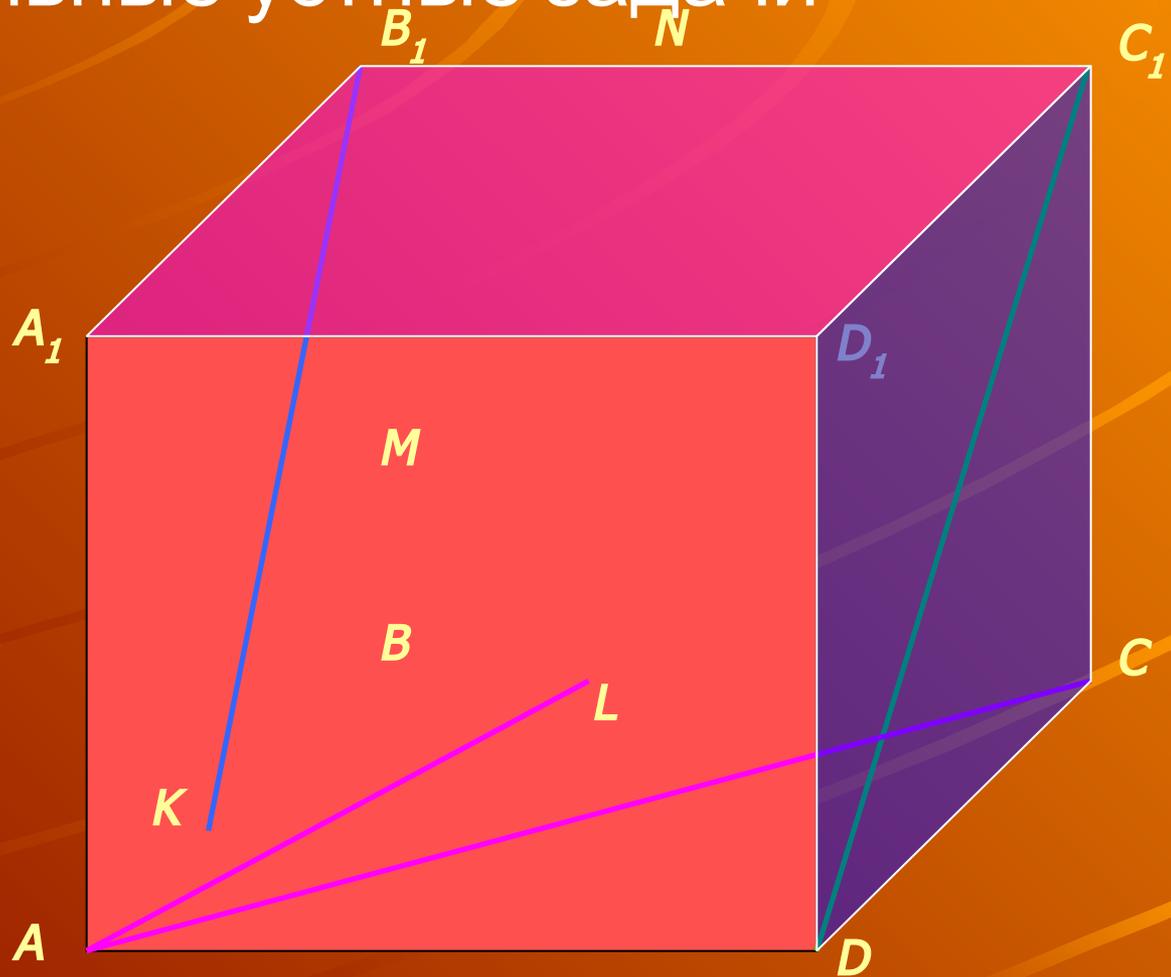
- Подготовительные устные задачи

Параллельны ли  
прямая  $B_1K$  и  
плоскость  $DD_1C_1C$ ?

Параллельны ли  
прямые  $C_1D$  и  $B_1K$ ?

Параллельны ли  
прямая  $AC$  и  
плоскость  $A_1B_1C_1D_1$ ?

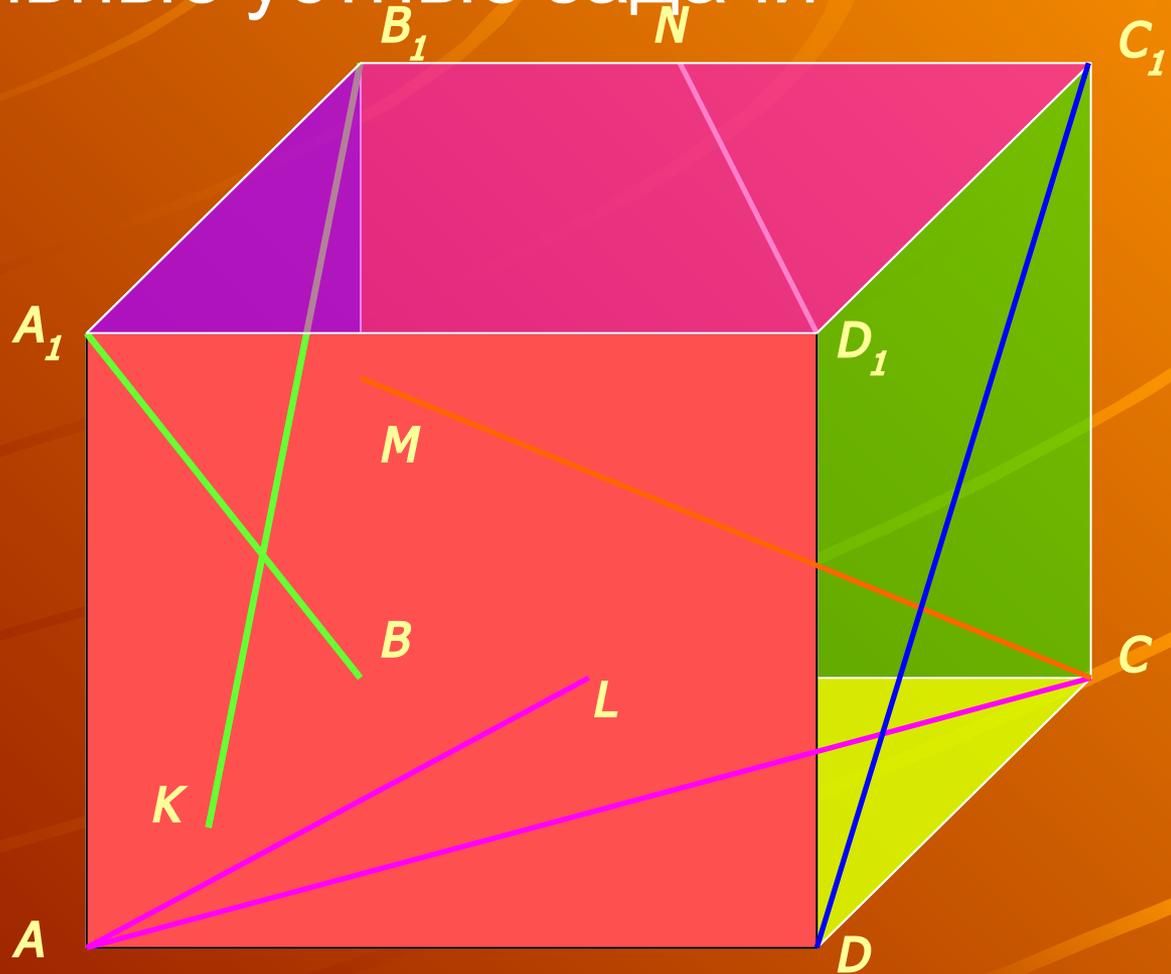
Параллельны ли  
прямая  $AL$  и  
плоскость  $A_1B_1C_1D_1$ ?



# Первый урок

- Подготовительные устные задачи

*Установите все пары: прямая и параллельная ей плоскость*



# Первый урок

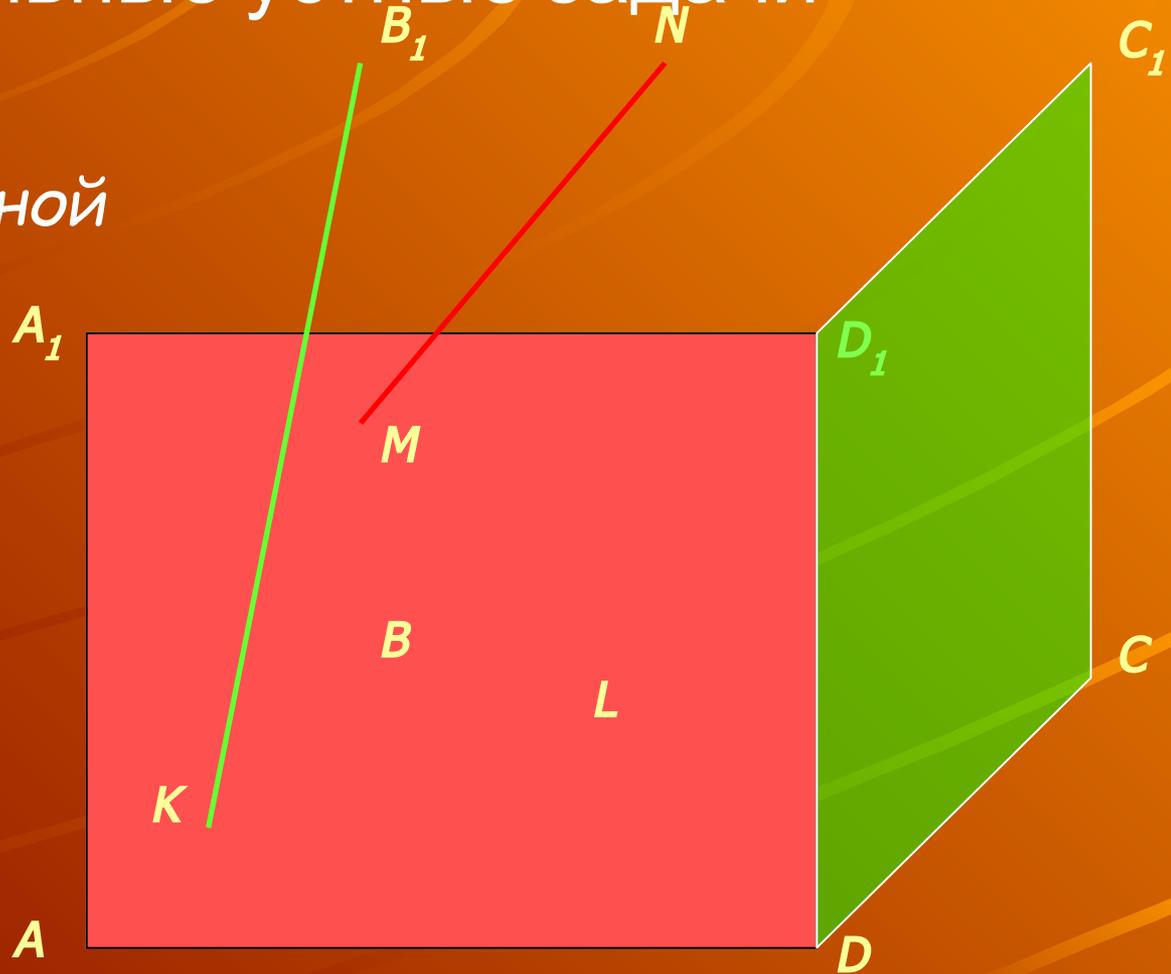
- Подготовительные устные задачи

Как определяется расстояние между прямой и параллельной ей плоскостью?

Найдите расстояние между прямой  $MN$  и плоскостью  $AA_1D_1D$

Найдите расстояние между прямой  $MN$  и плоскостью  $DD_1C_1C$

Найдите расстояние между прямой  $B_1K$  и плоскостью  $DD_1C_1C$



# Первый урок

- Постановка проблемы

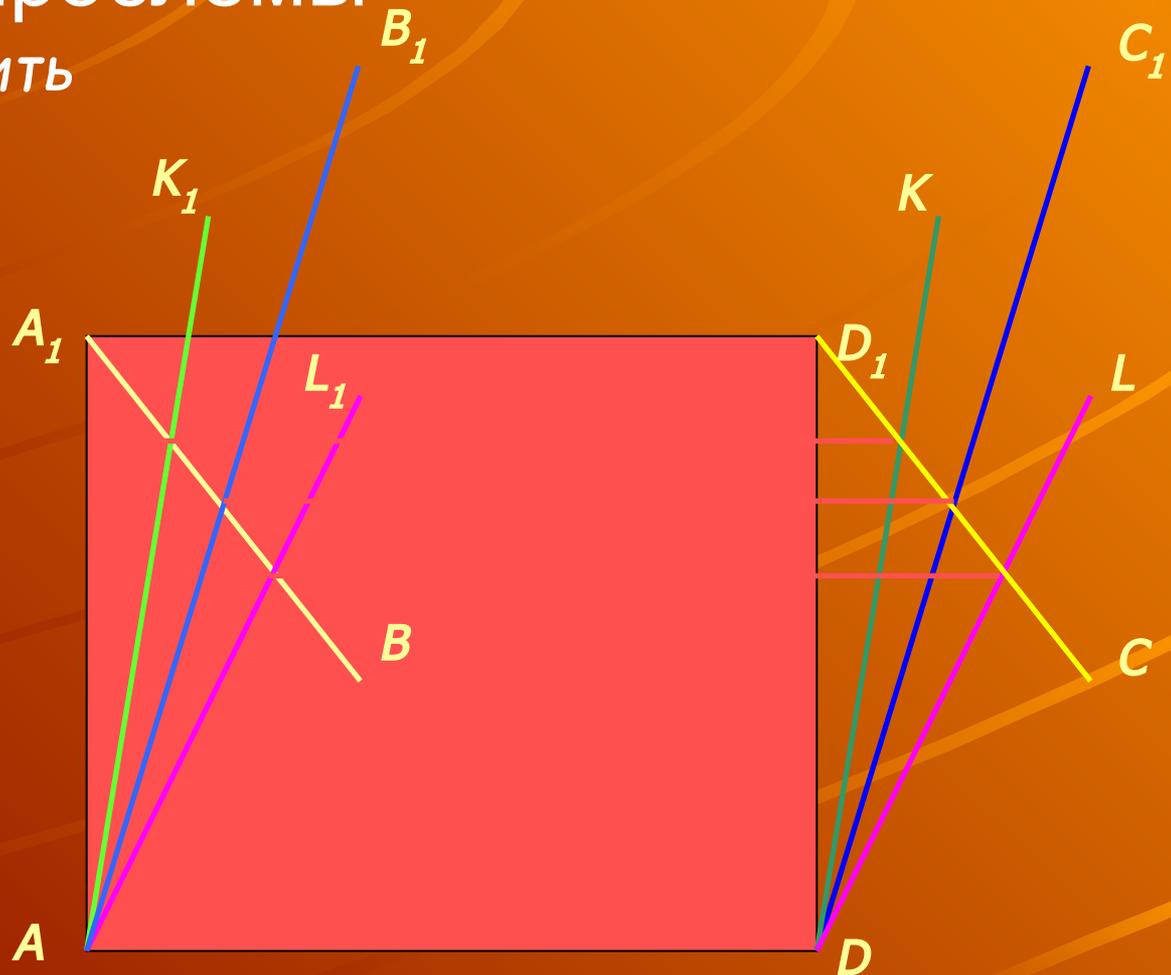
Как можно определить расстояние между скрещивающимися прямыми?

Найдите расстояние между прямыми:

$A_1B$  и  $C_1D$ ,

$A_1B$  и  $DK$ ,

$A_1B$  и  $DL$ .



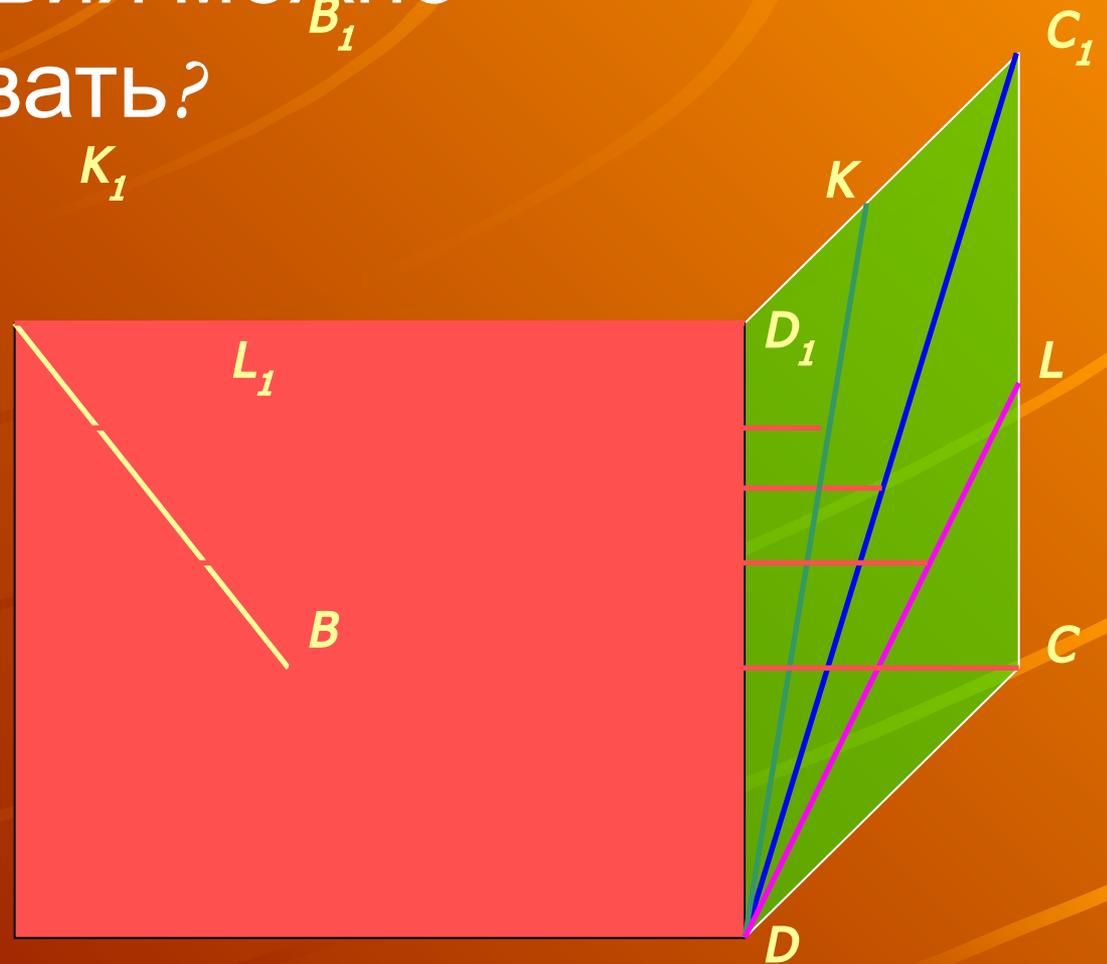
# Первый урок

- Какие следствия можно

формулировать?

Отрезок с концами на двух скрещивающихся прямых одновременно перпендикулярный им и есть расстояние между этими прямыми

Этот отрезок равен расстоянию от одной из скрещивающихся прямых до параллельной ей плоскости в которой лежит другая прямая

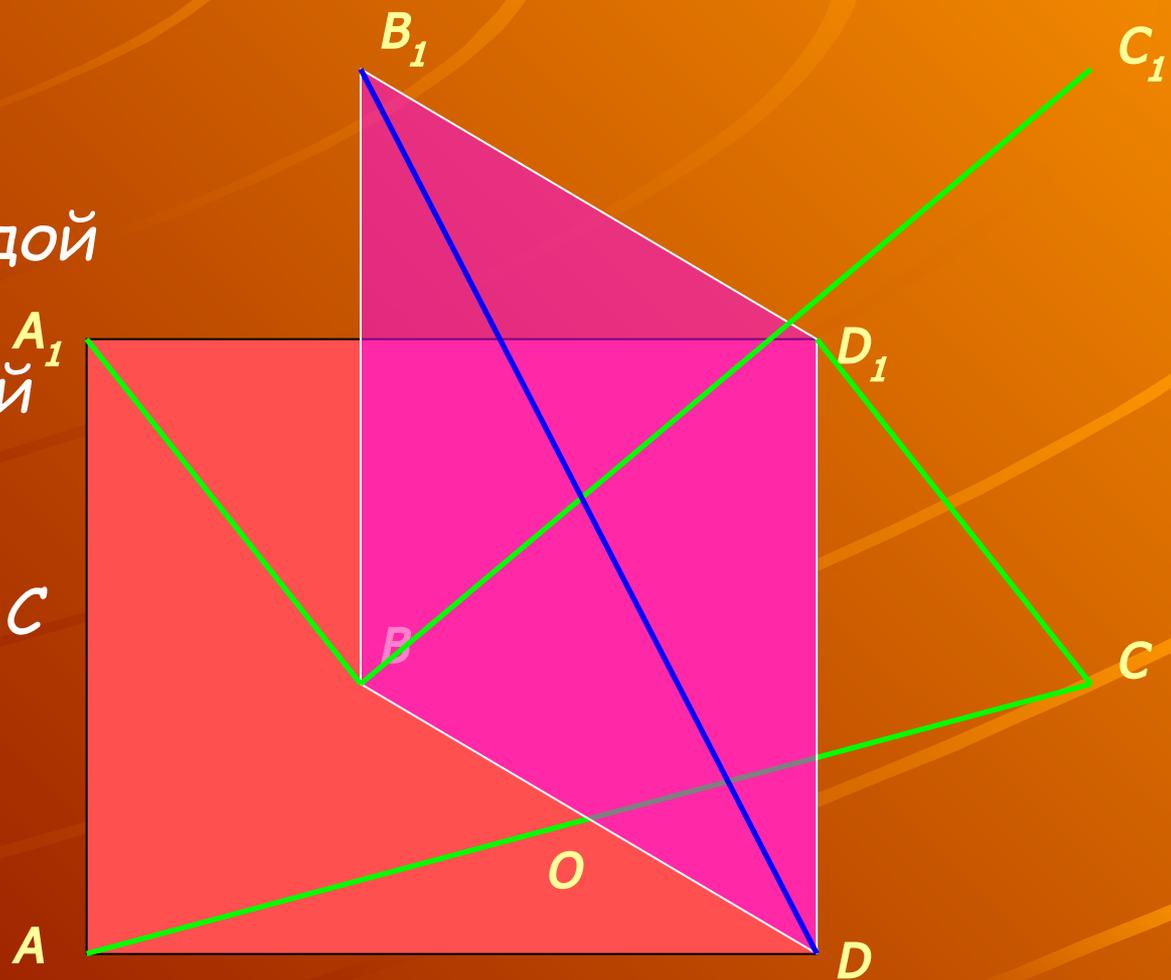


# Первый урок

- Теорема

Диагональ куба перпендикулярна каждой диагонали грани куба,  $A_1C_1$  скрещивающейся с ней

Доказательство:  
 $AC \perp BB_1D_1D$ , откуда  $AC \perp$  любой прямой плоскости  $BB_1D_1D$

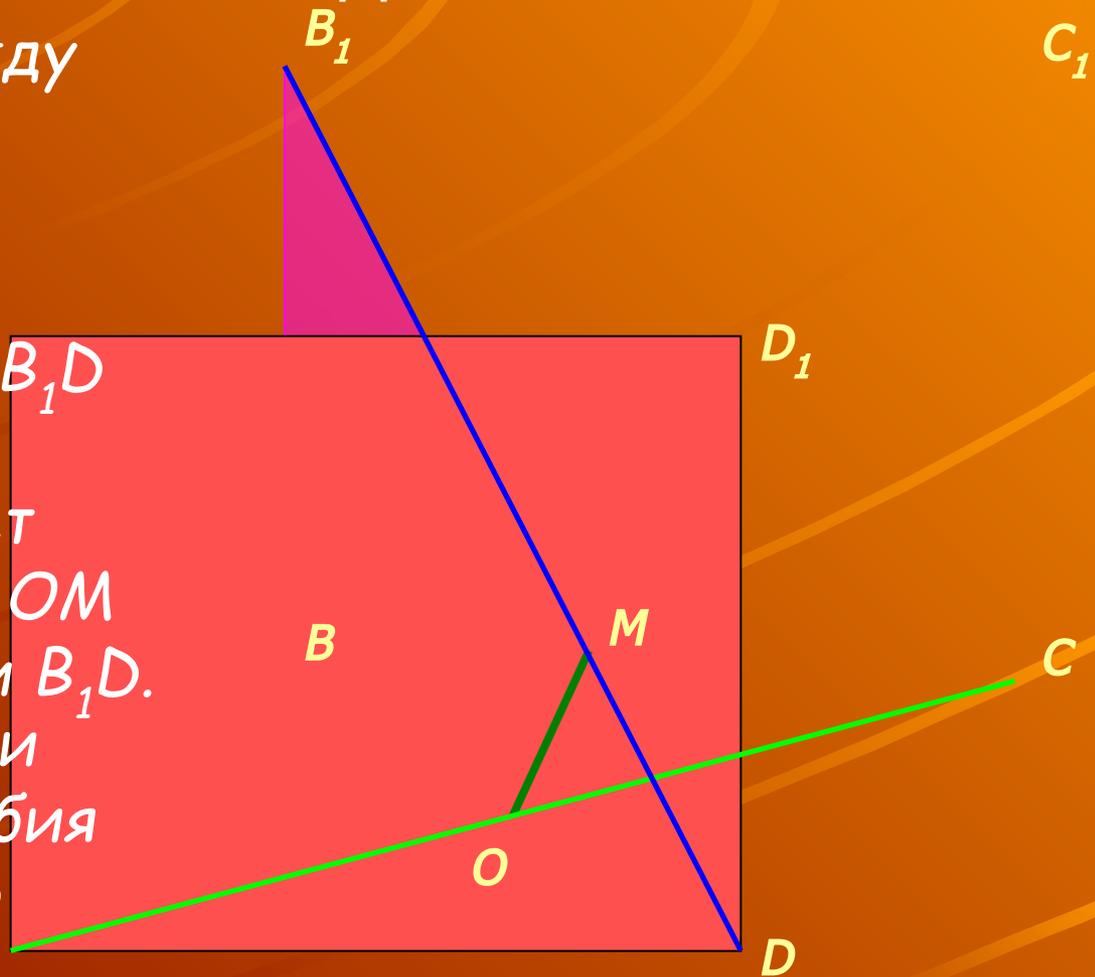


# Первый урок

- Следствие теоремы. Задача.

Найдите расстояние между скрещивающимися диагональю куба и диагональю его грани.

Решение. Треугольник  $BB_1D$  перпендикулярен  $AC$ .  
Отрезок  $OM \perp B_1D$ , будет перпендикулярен и  $AC$ .  $OM$  - расстояние между  $AC$  и  $B_1D$ .  
Рассмотрим треугольники  $BB_1D$  и  $OMD$ . Из их подобия следует  $OM/BB_1 = OD/B_1D$   
 $OM = BB_1 \cdot OD/B_1D = a/\sqrt{6}$



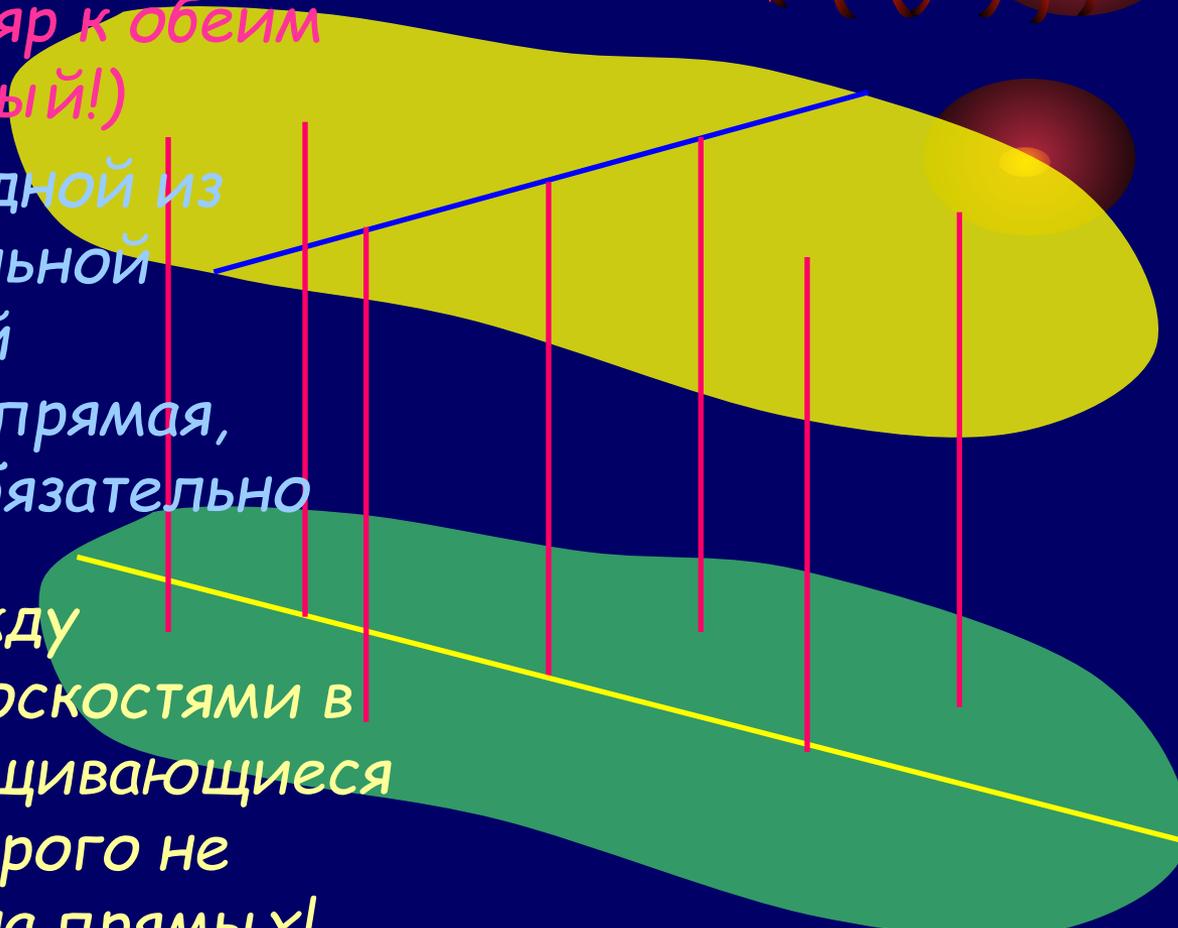
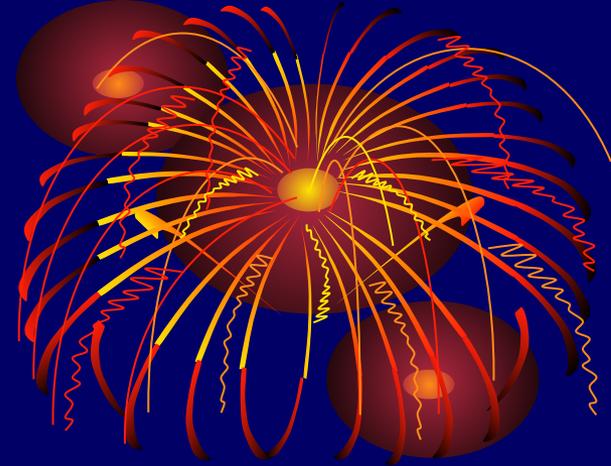
# Второй урок

Обобщение. Три типовых случая определения расстояния между скрещивающимися прямыми

Общий перпендикуляр к обеим прямым (единственный!)

Перпендикуляр от одной из прямых до параллельной плоскости, в которой расположена другая прямая, конец которого не обязательно лежит на прямой!

Перпендикуляр между параллельными плоскостями в которых лежат скрещивающиеся прямые, концы которого не обязательно лежат на прямых!

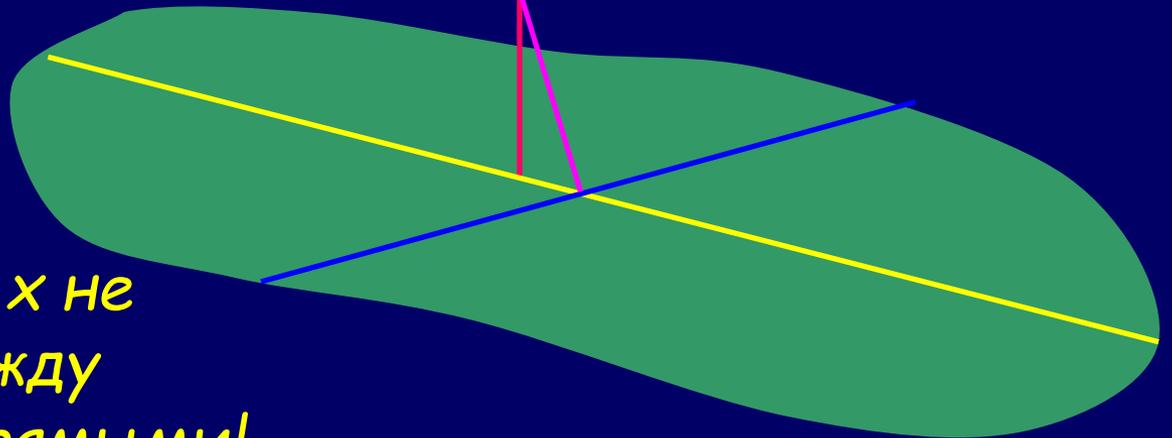
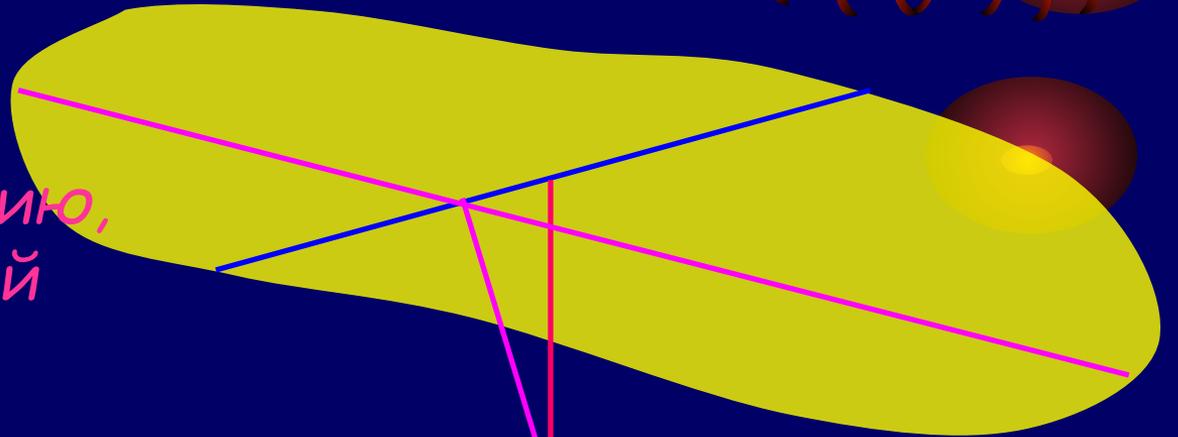


# Второй урок

Проблема: Как найти плоскость с одной прямой, параллельную другой скрещивающейся прямой?

Достаточно провести через одну из скрещивающихся прямых прямую линию, параллельную другой скрещивающейся

Заметим, что отрезок соединяющий точки пересечения пар параллельных прямых не равен расстоянию между скрещивающимися прямыми!



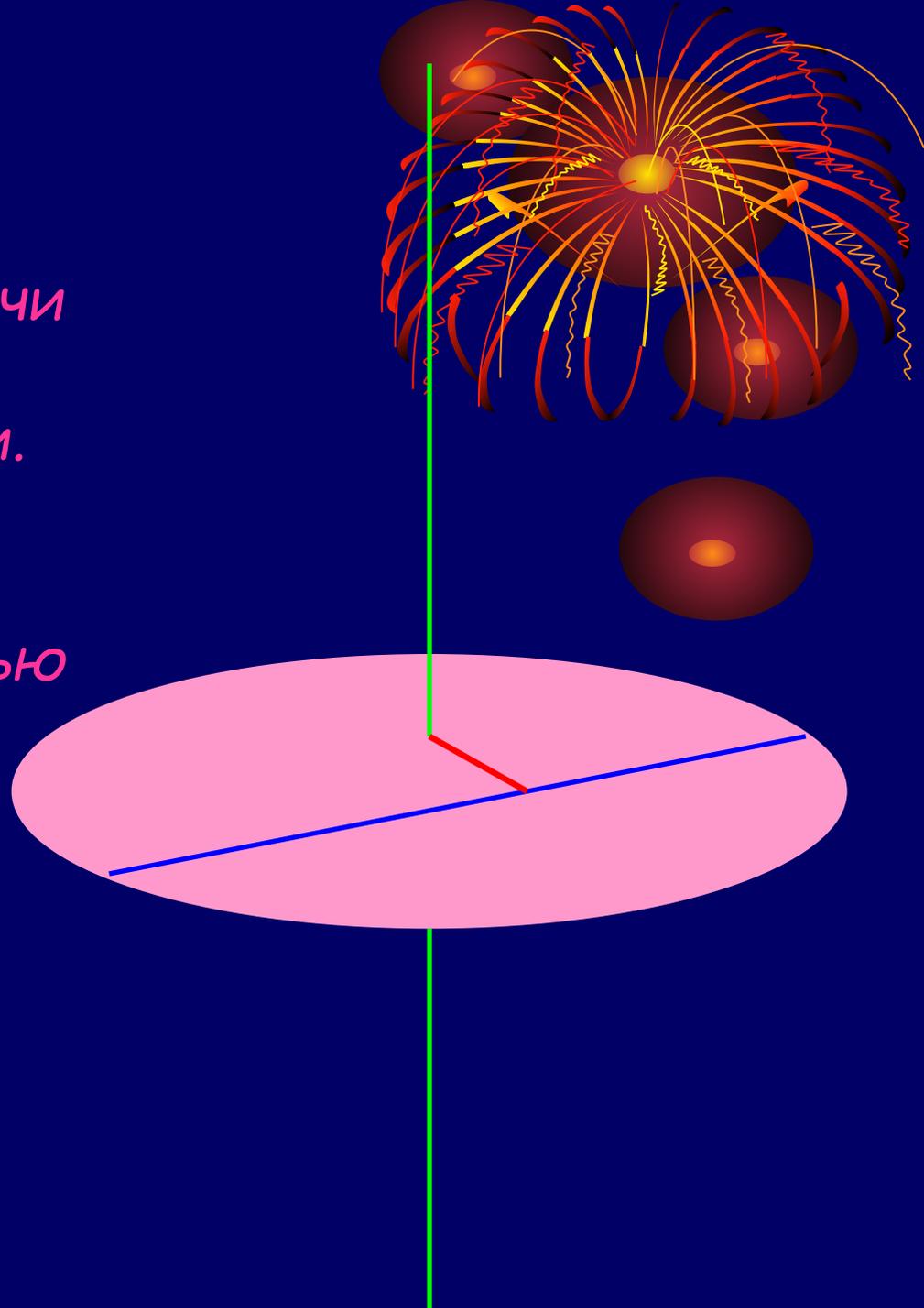
# Второй урок

## Типовые задачи

Чаще других возникают задачи с перпендикулярными скрещивающимися прямыми.

К этому типу относится уже рассмотренная задача о расстоянии между диагональю куба и скрещивающейся диагональю его грани.

Стандартный прием решения этих задач заключается в проведении плоскости, в которой лежит одна прямая, перпендикулярно другой скрещивающейся прямой



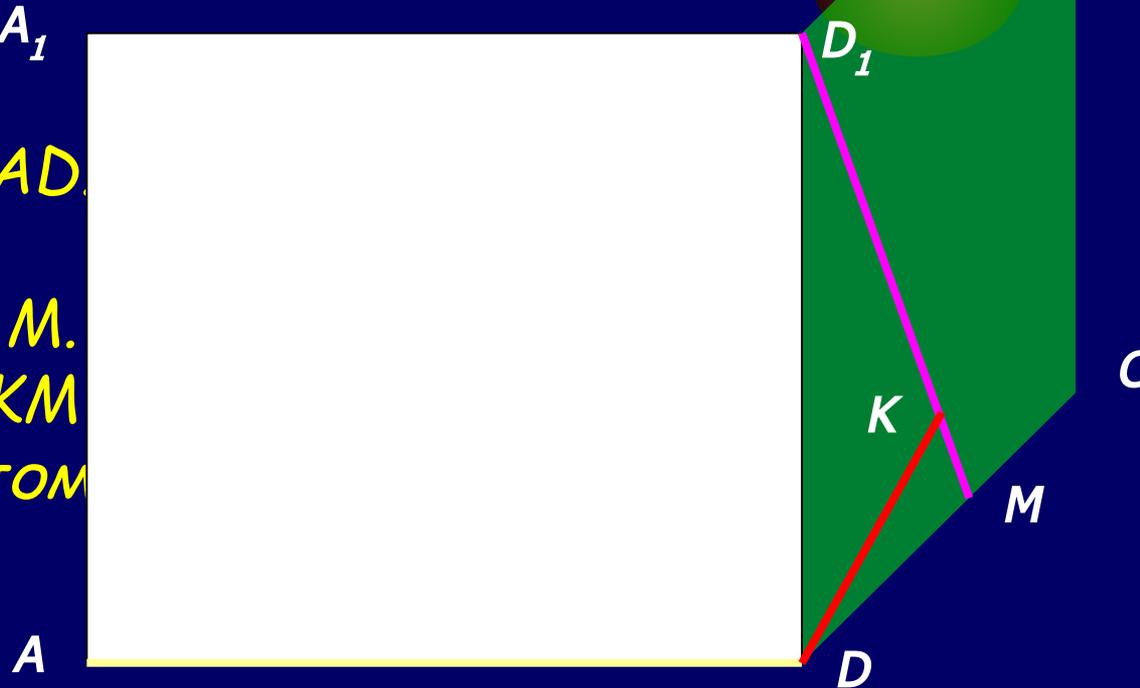
# Второй урок

## Решение задач

Дан куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  с длиной ребра  $AB=a$ . Найдите расстояние между прямыми  $AD$  и  $D_1 M$ , где  $M$  - середина ребра  $DC$

Плоскость грани  $DD_1 C_1 C$  перпендикулярна ребру  $AD$ . Из точки  $D$  опустим перпендикуляр  $DK$  на  $D_1 M$ . Треугольники  $DD_1 M$  и  $DKM$  подобны с коэффициентом подобия  $1/2$ .

$$DK = D_1 M / 2 = a \cdot \sqrt{5} / 2$$

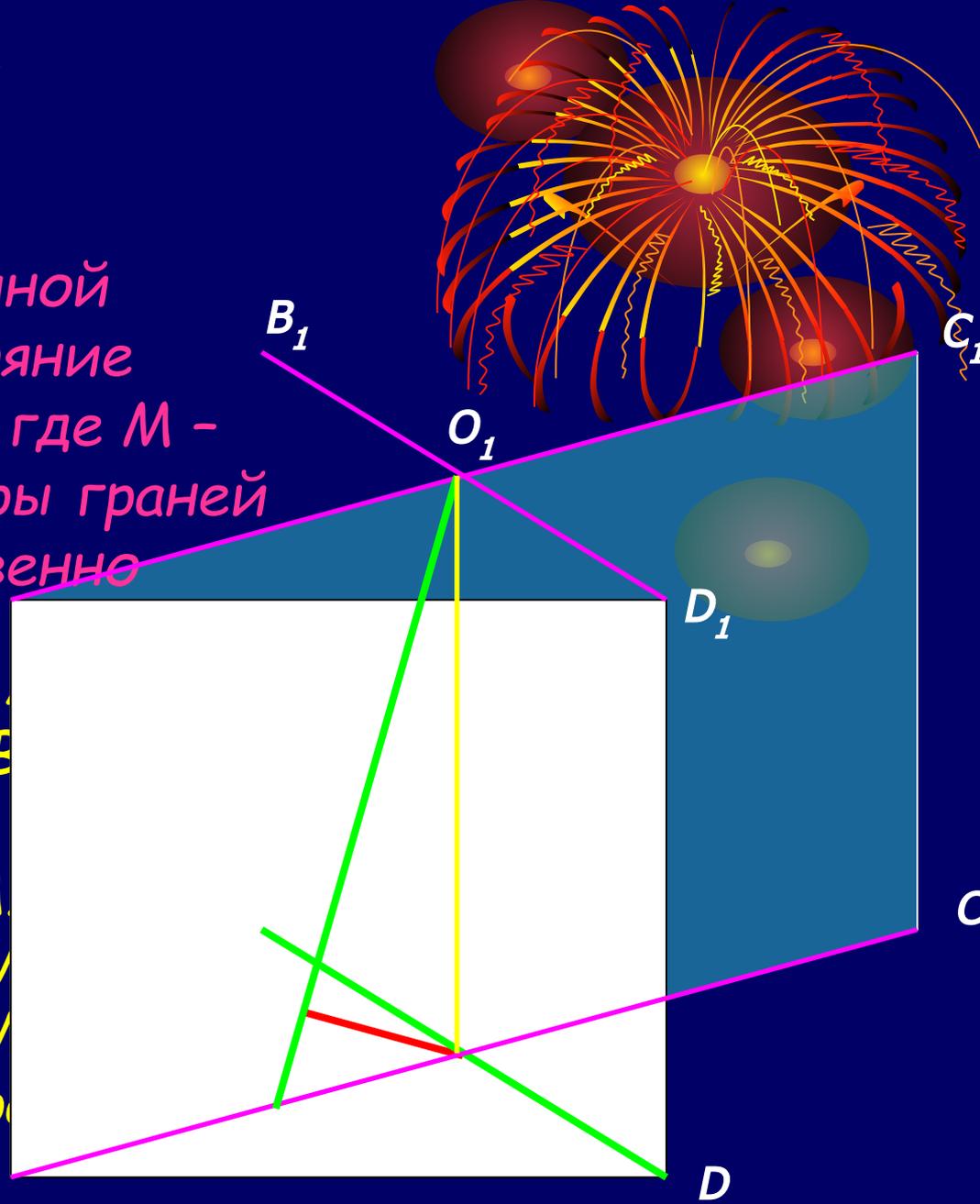


# Второй урок

## Решение задач

Дан куб  $ABCA_1B_1C_1D_1$  с длиной ребра  $AB=a$ . Найдите расстояние между прямыми  $BD$  и  $O_1M$ , где  $M$  - середина  $AO$ ,  $O$  и  $O_1$  - центры граней  $ABCD$  и  $A_1B_1C_1D_1$ , соответственно

Диагональная плоскость  $AO_1D_1$  перпендикулярна прямой  $BD$ .  
Из точки  $O$  опустим перпендикуляр  $OK$  на  $O_1M$ .  
Треугольники  $OO_1M$  и  $OKM$  подобны.  $OK=OO_1 \cdot OM/O_1M = a/3$  (по теореме Пифагора  $O_1M=3/2\sqrt{2}$ ,  $OM=1/2\sqrt{2}$ )

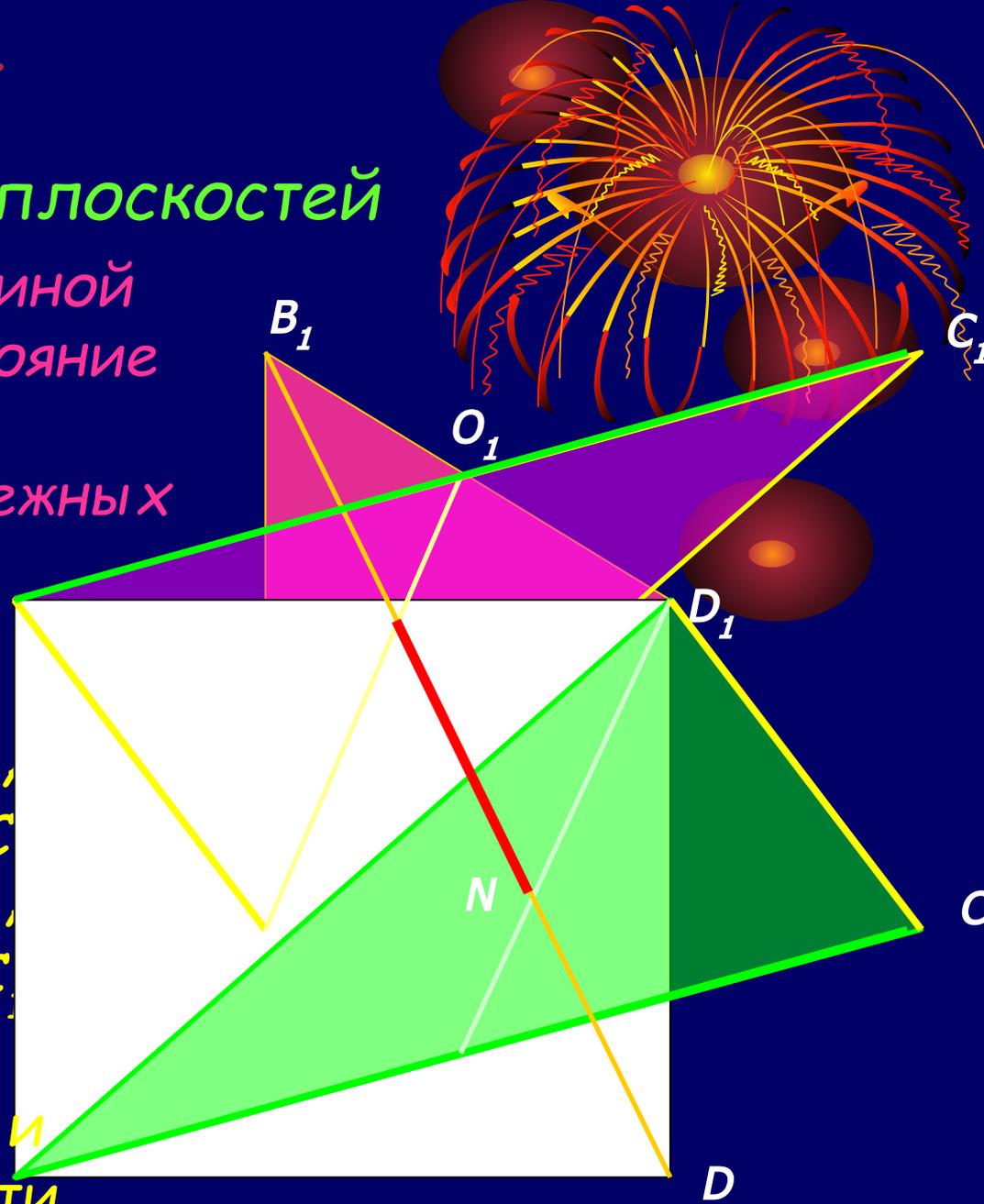


# Второй урок

## Прием параллельных плоскостей

Дан куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  с длиной ребра  $AB=a$ . Найдите расстояние между скрещивающимися диагоналями  $AC$  и  $A_1 B$  смежных граней  $ABCD$  и  $AA_1 B_1 B$

Проведем диагональ  $D_1 C$  ||  
получим треугольник  $AD_1 C$   
проведем диагональ  $A_1 C_1$  ||  
получим треугольник  $A_1 B C_1$   
Плоскости треугольников  
 $AD_1 C$  и  $A_1 B C_1$  параллельны и  
перпендикулярны плоскости  
 $BB_1 D_1 D$

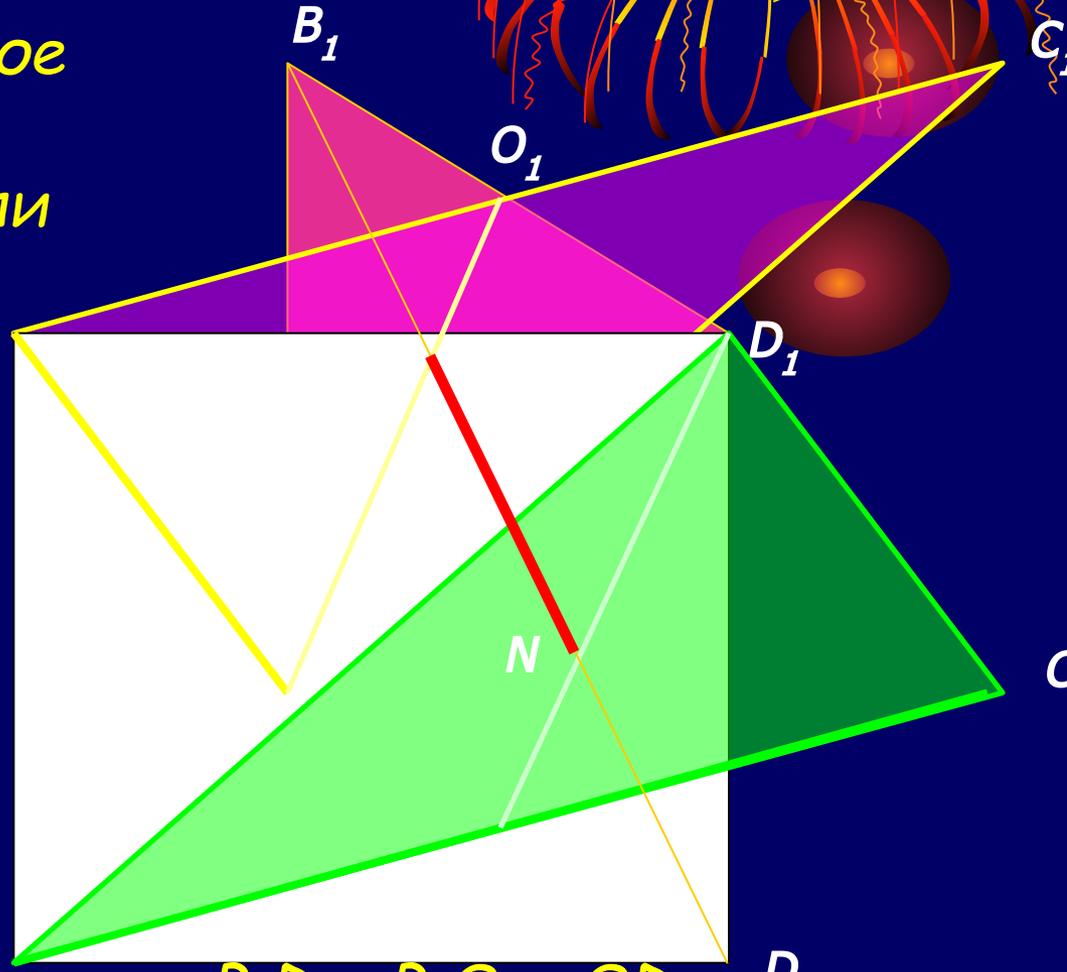
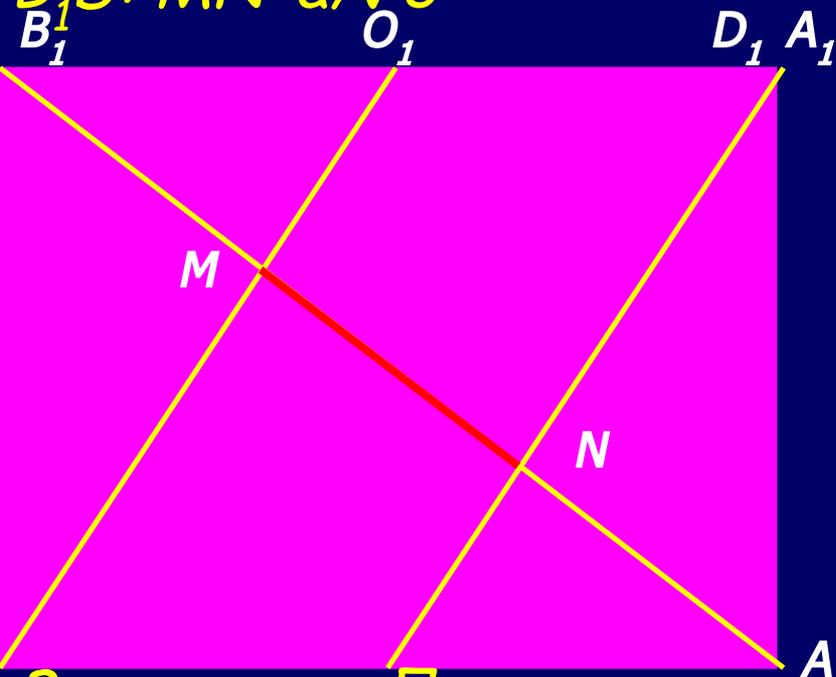


# Второй урок

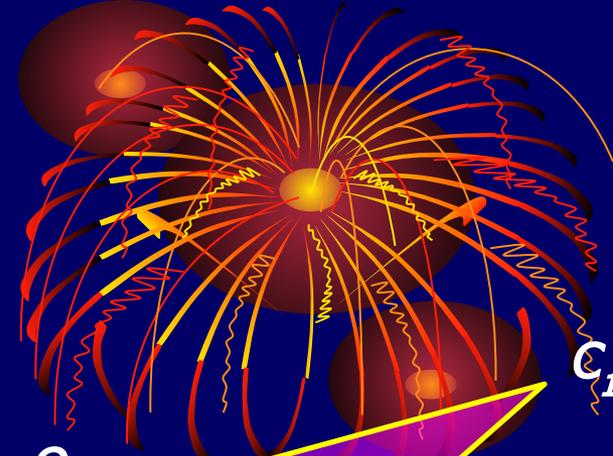
## Прием параллельных плоскостей

Рассмотрим сечение куба плоскостью  $BB_1D_1D$ . Искомое расстояние  $MN$  по теореме Фалеса равно  $1/3$  диагонали  $B_1D$ :  $MN = a/\sqrt{3}$

$$B_1D: MN = a/\sqrt{3}$$



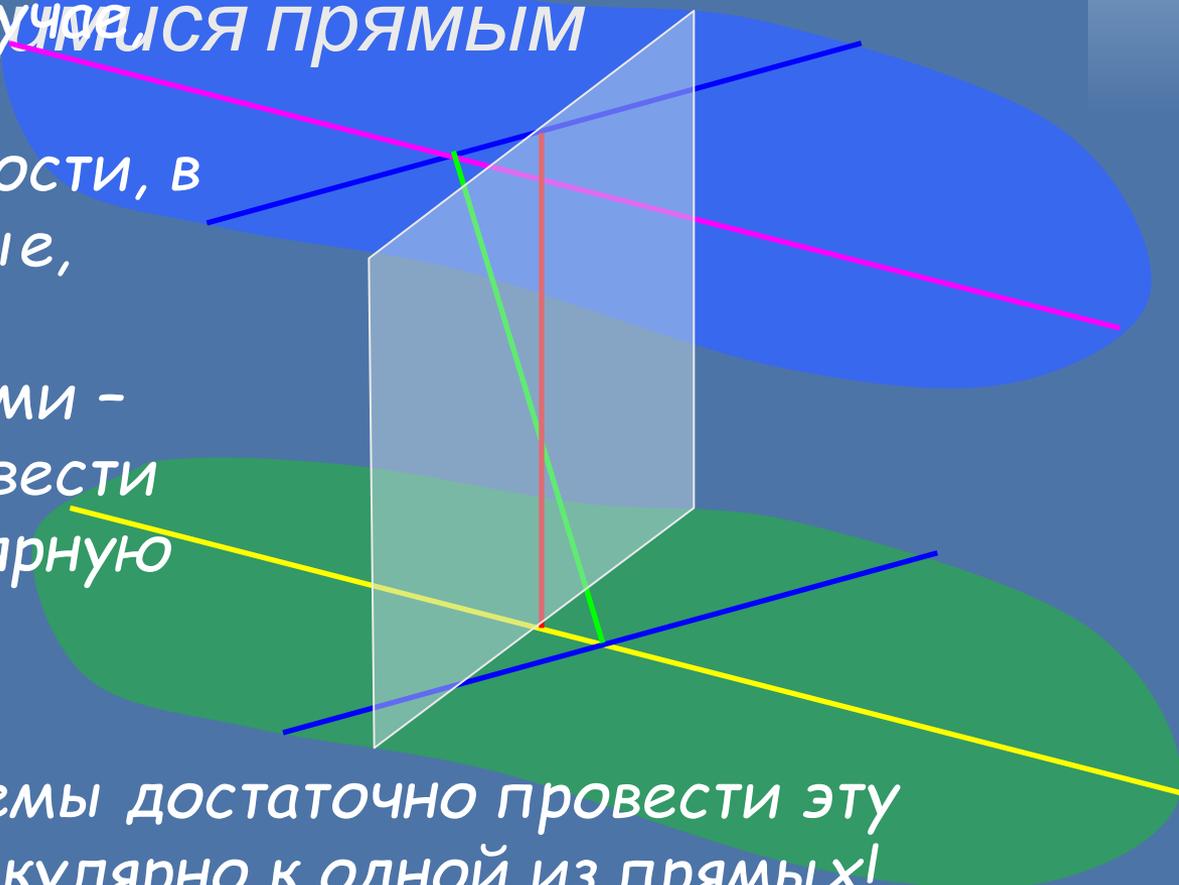
Замечание. Перпендикулярность  $B_1D$  к  $B_1O$  и  $OD_1$  следует из доказанной теоремы на первом уроке.



## Третий урок

- Обобщение приемов определения расстояний между

Проблема. Даже если получаются прямым скрещивающимися прямым  
если определены параллельные плоскости, в которых лежат прямые, часто трудно найти расстояние между ними - необходимо еще провести третью перпендикулярную плоскость



Для решения проблемы достаточно провести эту плоскость перпендикулярно к одной из прямых!

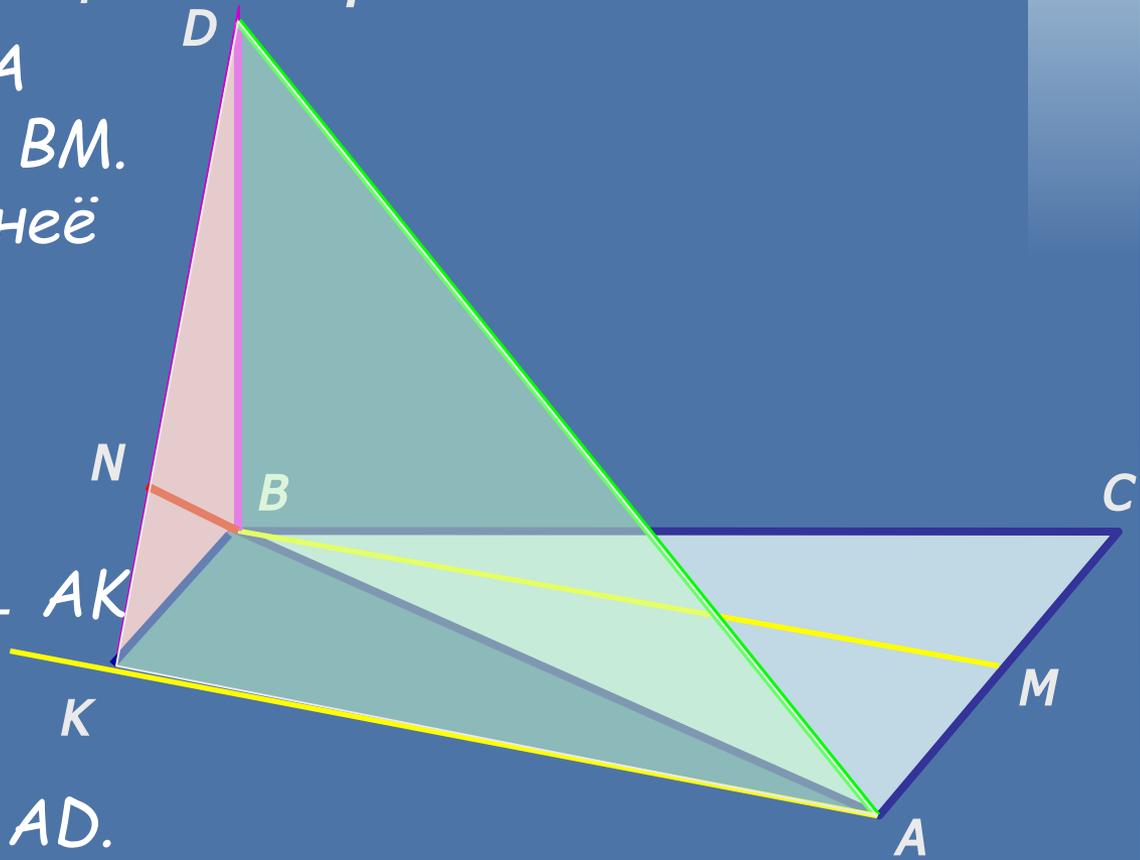
# Третий урок

- Задача на обобщение приема

Проведем через точку  $A$  прямую параллельную  $BM$ . Из точки  $B$  опустим на неё перпендикуляр  $BK$ .

По теореме о трех перпендикулярах  $DK \perp AK$  и треугольник  $DBK \perp$  треугольнику  $ADK$ , в которой лежит прямая  $AD$ .

Прямая  $BM$  находится на расстоянии  $BN$  от плоскости  $ADK$ , равном длине перпендикуляра  $BN$  к  $DK$ !

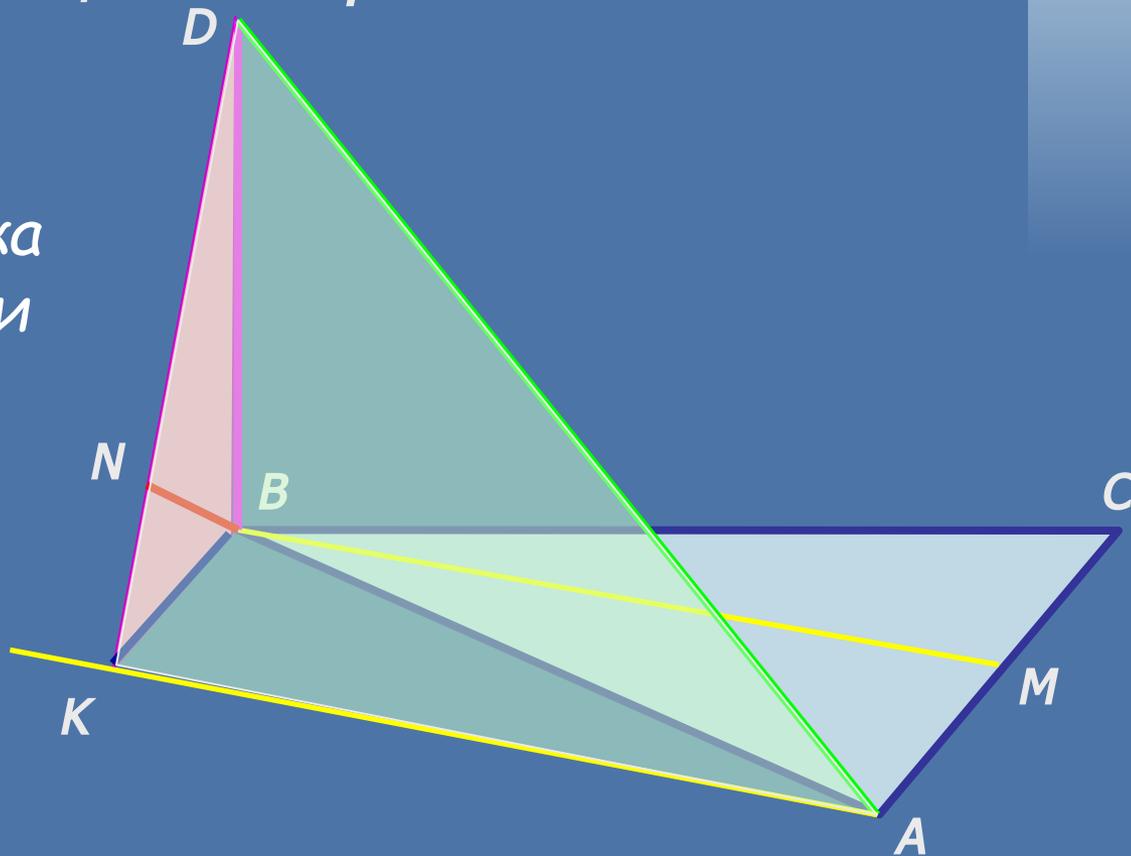


# Третий урок

- Задача на обобщение приема

Вычислим длину отрезка  $BN$  через площадь  $DBK$  и длину  $DK$ .

$$S_{DBK} = a^2/4,$$
$$DK = \sqrt{5} \cdot a/2,$$
$$BN = 2 \cdot S_{DBK} / DK = a/\sqrt{5}$$



# Третий урок

- Рефлексия. Осмысление

Рассмотренный способ обобщенного приема последней задачи носит обобщенный характер.

Если не проходят более элементарные приемы, то последний способ часто оказывается решающим.

Идея этого приема связана с двумя дополнительными объектами: а) плоскостью, в которой лежит одна из прямых. б) перпендикуляром к ней, через который проходит вторая прямая.

Запомните последнюю картинку!



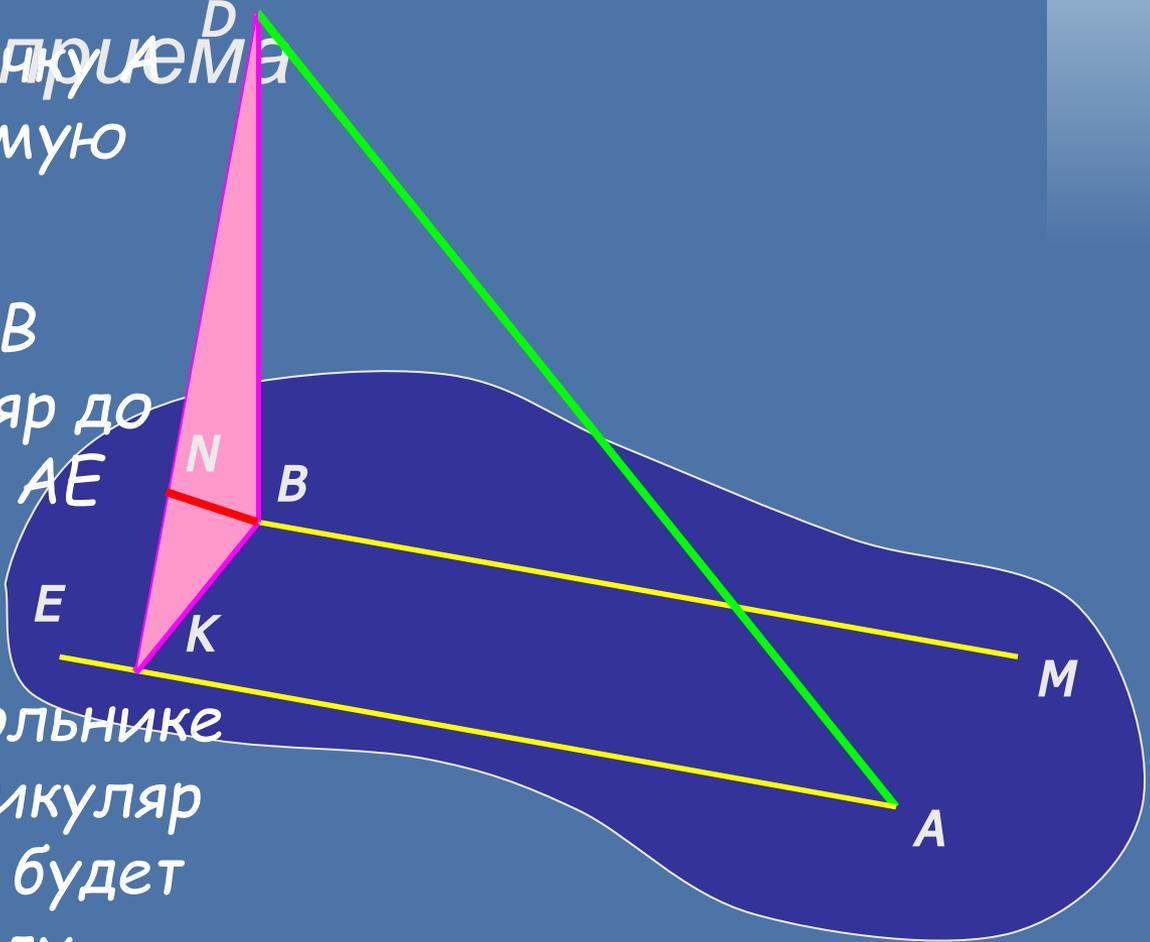
# Третий урок

- Ориентировочная основа

Первый шаг: через точку  $D$  прямой проводим прямую параллельно  $BM$

Второй этап: из точки  $B$  опустим перпендикуляр до пересечения с прямой  $AE$

Третий этап: в прямоугольном треугольнике  $DBK$  опустим перпендикуляр  $BN$  на  $DK$ . Его длина и будет равна расстоянию между прямыми  $AD$  и  $BM$

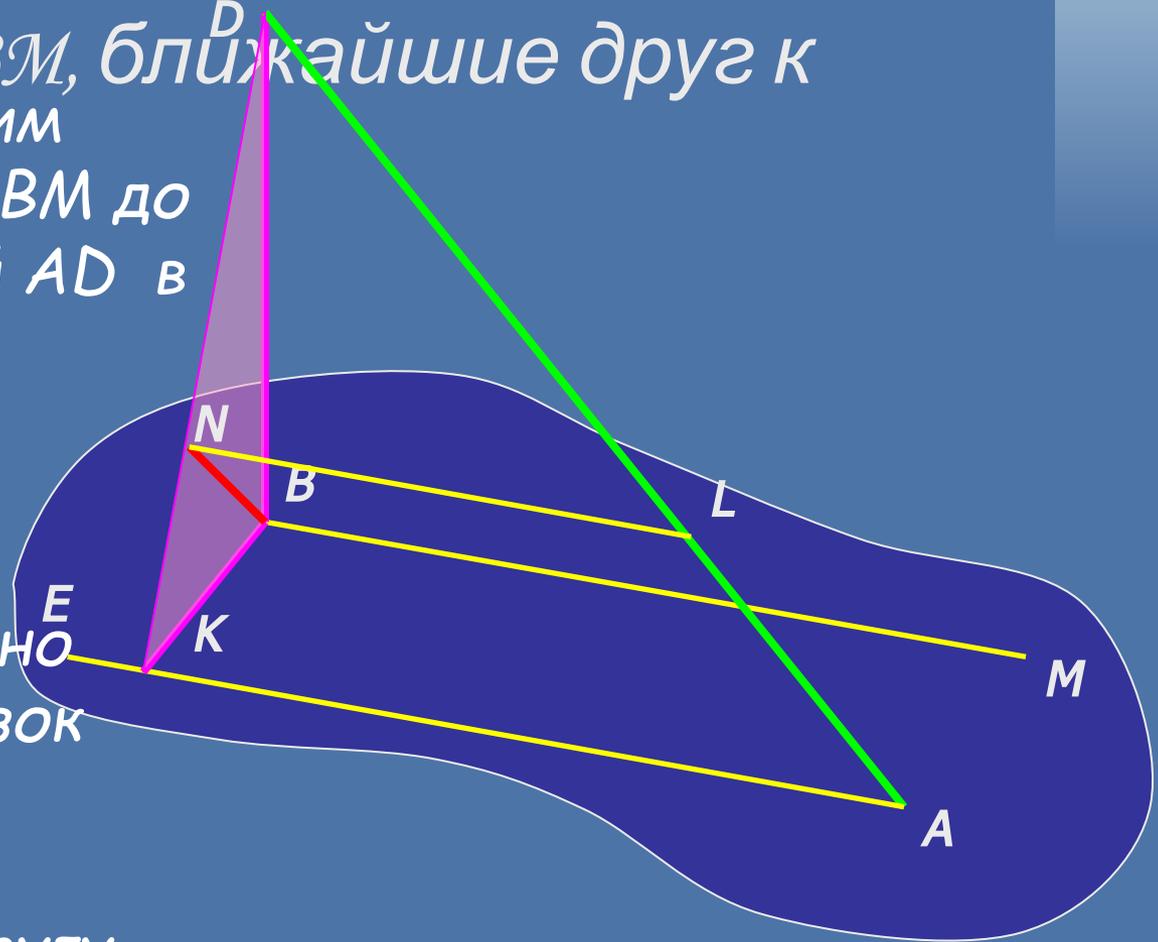


# Третий урок

- Как найти точки на скрещивающихся прямых  $AD$  и  $BM$ , ближайшие друг к другу?

Через точку  $N$  проводим прямую параллельно  $BM$  до пересечения с прямой  $AD$  в точке  $L$  (в плоскости треугольника  $ADK$ ).

Прямоугольный треугольник  $DBK$  переносим параллельно вдоль прямой на отрезок  $NL$ . Новые положения точек  $B$  и  $N$  будут ближайшими друг к другу точками прямых  $AD$  и  $BM$



# Третий урок

- Задача на закрепление

В кубе с длиной ребра  $a=5$  на

ребрах  $AD$  и  $D_1C$  взяты точки  $K$  и  $M$ , соответственно. Найдите

расстояние между прямыми  $A_1K$  и  $D_1M$ , если  $AK=4$  и  $DM=3$ .

Решение. Через точку  $E$  пересечения  $A_1K$  с  $D_1D$  проведем прямую  $\parallel D_1M$ . Из точки  $D_1$  на неё опустим перпендикуляр до пересечения в точке  $F$ . Высота  $D_1N$  треугольника  $A_1D_1F$  и дает искомое расстояние.

