



Магические квадраты

Презентация к исследовательской работе

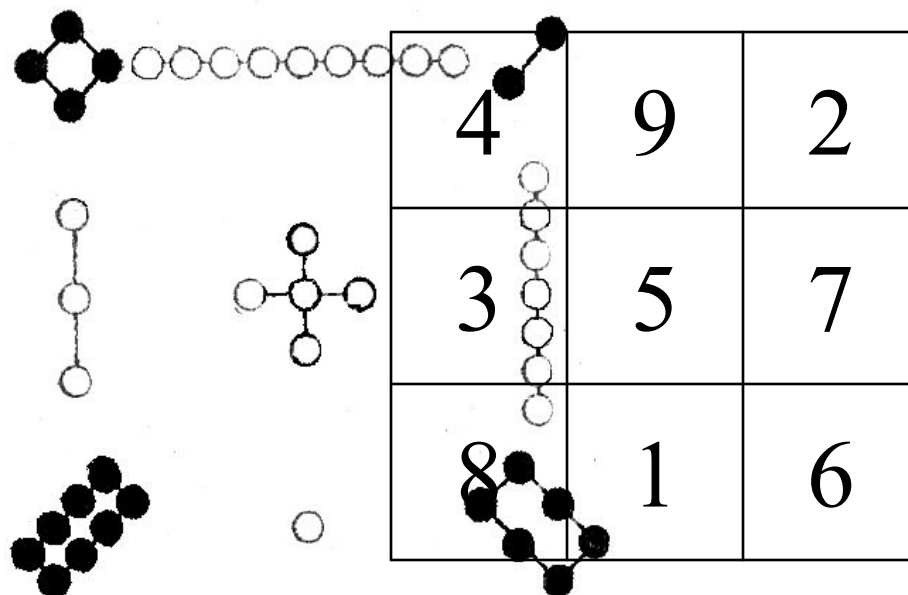
Выполнил: ученик 10 класса Кирьяков Кирилл

Руководитель: Лонская Т.А., учитель математики

Пришельцы из Китая и Индии

- Одним из наиболее древних и наиболее совершенных видов кросс-сумм является так называемый магический (или волшебный) квадрат.
- Придуманы магические квадраты впервые, по-видимому, китайцами, так как самое раннее упоминание о них встречается в китайской книге, написанной за 4000-5000 лет до нашей эры.

Пришельцы из Китая и Индии



- Старейший в мире магический квадрат представлен выше. Черными кружками в этом квадрате изображены четные (женственные) числа, белыми – нечетные (мужественные) числа.
- В обычной записи он не так эффектен:

Пришельцы из Китая и Индии

- И всё же это великолепный образец кросс-сумм! Девять порядковых чисел размещены в девяти клетках квадрата так, что суммы чисел вдоль каждой строки, каждого столбца и каждой из двух диагоналей одинаковы (основное свойство магического квадрата).
- Более поздние сведения о магических квадратах относящиеся уже к 1 веку, получены из Индии. Вот один из таких древнеиндийских памятников почти 2000-летней давности:

1	14	15	4
12	7	6	9
8	11	10	5
13	2	3	16

Пришельцы из Китая и Индии

- Здесь 16 порядковых чисел размещены в шестнадцати клетках квадрата так, что выполняется основное свойство магического квадрата.
- Действительно:

1	+	14	+	15	+	4	=	34
+		+		+		+		
12	+	7	+	6	+	9	=	34
+		+		+		+		
8	+	11	+	10	+	5	=	34
+		+		+		+		
13	+	2	+	3	+	16	=	34
34		34		34		34		

Пришельцы из Китая и Индии

- Каждое число магического квадрата участвует в двух суммах, а числа расположенные по диагоналям даже в трёх, и все эти суммы равны между собой!

Du must verstehen.
Aus Eins mach Zehn
Und Zwei lass gehn,
Und Drei mach gleich,
So bist du reich.
Verlier' ich was, ich gewinn.
Aus Fünf und Sechs,
So sagt die Hex,
Mach' Sieben und Acht,
So ist's vollbracht:
Und Neun ist Eins,
Und Zehn ist keins,
Das ist das Hexen-
Einmal-Eins!

Недаром в ту далёкую эпоху суеверий индийцы, а следом за

ними и арабы приписывали этим числовым сочетаниям

таинственные и магические свойства.

Вся эта своеобразная мозаика чисел её постоянством сумм

действительно придаёт квадрату «волшебную» силу....

происхождения искусства. Зачеркиваешь 4

И магические квадраты вошли в искусство. Из 5 и 6.

В «Фаусте» Гете есть сцена приготовления колдуньей

омолаживающего зелья. Делает 7 и 8 (и наоборот)

Слова, которыми колдунья сопровождает свои манипуляции, Квадрат готов

обычно воспринимаются читателями «Фауста» как

тарабарщина, бессмыслица:

.....
.....
.....

Пришельцы из Китая и Индии

Давайте это сделаем, построим квадрат из девяти ячеек и разместим в ячейках 9 первых натуральных чисел в порядке их следования.

Итак, мы указали на квадрате

и 13 строк поэтического текста:

Числа 2 и 3 оставляем на своих местах, так как сказано: *пропускаешь 2, а также 3.*

бесплодно тратили усилия на поиски смысла,

скрытого в этом тринадцатилетии. Очевидно, у

них не возникала мысль попытаться воспроизвести на бумаге рекомендации колдуны.

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Пришельцы из Китая и Индии

- Колдунья говорит: «Квадрат готов», но тут она хитрит. Ей еще надо в последней ячейке квадрата заменить девятку числом 4
- Вот теперь формирование «талисмана» окончено и последние три строки тринадцатистишия уже ничего не добавляют к пониманию смысла «заклинаний» колдуньи. Особенность получившегося квадрата состоит в том, что магическая константа (15) получается только при сложении чисел вдоль любой строки и любого столбца, но не вдоль диагоналей.
- Квадрат с таким свойством чисел, занимающих его ячейки, принято называть *полумагическим*.
- Превращением начального квадрата в полумагический Гете символизировал процесс омоложения Фауста.

10	2	3
0	7	8
5	6	4

Свойства магического квадрата

А.Дюрера

- В Европу магические квадраты проникли лишь в начале XV века. А в начале XVI века один из них был увековечен выдающимся немецким художником, гравером и немного математиком А. Дюрером в его лучшей гравюре «Меланхолия» (1514 г.).
- Дюрер воспроизвел на гравюре (в несколько измененном виде) тот самый магический квадрат, составленный из 16 чисел.
- Очарование этого магического квадрата не только в постоянстве сумм, которое является лишь его основным свойством. Подобно тому, как в истинно художественном произведении находишь тем больше новых привлекательных сторон, чем больше в него вглядываешься, так и в этом произведении математического искусства таится немало красивых свойств, помимо основного.

1	14	15	4
12	7	6	9
8	11	10	5
13	2	3	16

Свойства магического квадрата А.Дюрера

- Укажем еще шесть дополнительных свойств приведенного нам шестнадцатиклеточного магического квадрата:

1. Сумма чисел, расположенных по углам нашего магического квадрата, равна 34, то есть тому же числу, что и сумма чисел вдоль каждого ряда квадрата:

$$+ \quad + \quad + \quad = \quad 34$$

2. Суммы чисел в каждом из маленьких квадратов (в 4 клетки), примыкающих к вершинам данного квадрата, и в таком же центральном квадрате тоже одинаковы и каждая из них равна 34:

1	14	15	4
12	7	6	9
8	11	10	5
13	2	3	16

Свойства магического квадрата А.Дюрера

3. В каждой строке квадрата есть пара рядом стоящих чисел, сумма которых - 15, и еще пара тоже рядом стоящих чисел, сумма которых -19.

$$\begin{array}{l} + \\ + \\ + \\ + \end{array} = 15$$

$$\begin{array}{l} + \\ + \\ + \\ + \end{array} = 19$$

4. Подсчитайте-ка теперь сумму квадратов чисел отдельно в двух крайних строках и в двух средних:

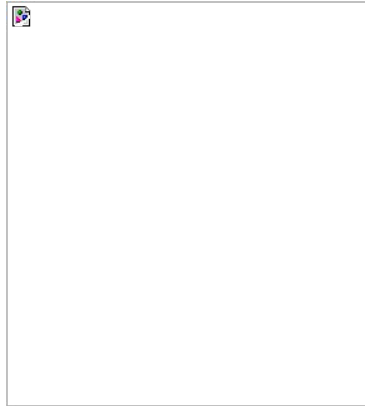
$$1^2 + 14^2 + 15^2 + 4^2 = 438 \text{ и } 13^2 + 2^2 + 3^2 + 16^2 = 438$$
$$12^2 + 7^2 + 6^2 + 9^2 = 310 \text{ и } 8^2 + 11^2 + 10^2 + 5^2 = 310$$

1	14	15	4
12	7	6	9
8	11	10	5
13	2	3	16

Как видите, получились попарно равные суммы!

Свойства магического квадрата А.Дюрера

5. Нетрудно убедиться, что аналогичным свойством обладают и столбцы чисел. Суммы квадратов чисел двух крайних столбцов равны между собой, и суммы квадратов чисел двух средних столбцов тоже одинаковы.



6. Если в данный квадрат вписать еще один квадрат с вершинами в серединах сторон данного квадрата, получим то, что показано на рисунке а, выше:

а) сумма чисел, расположенных вдоль одной пары противоположных сторон вписанного квадрата, равна сумме чисел, расположенных вдоль другой пары противоположных его сторон, и каждая из этих сумм равна опять-таки числу 34:

$$12+14+3+5 = 15+9+8+2 = 34;$$

б) еще интереснее — суммы квадратов и суммы кубов этих чисел

$$12^2+14^2+3^2+5^2 = 15^2+9^2+8^2+2^2$$

$$12^3+14^3+3^3+5^3 = 15^3+9^3+8^3+2^3$$

Свойства магического квадрата А.Дюрера

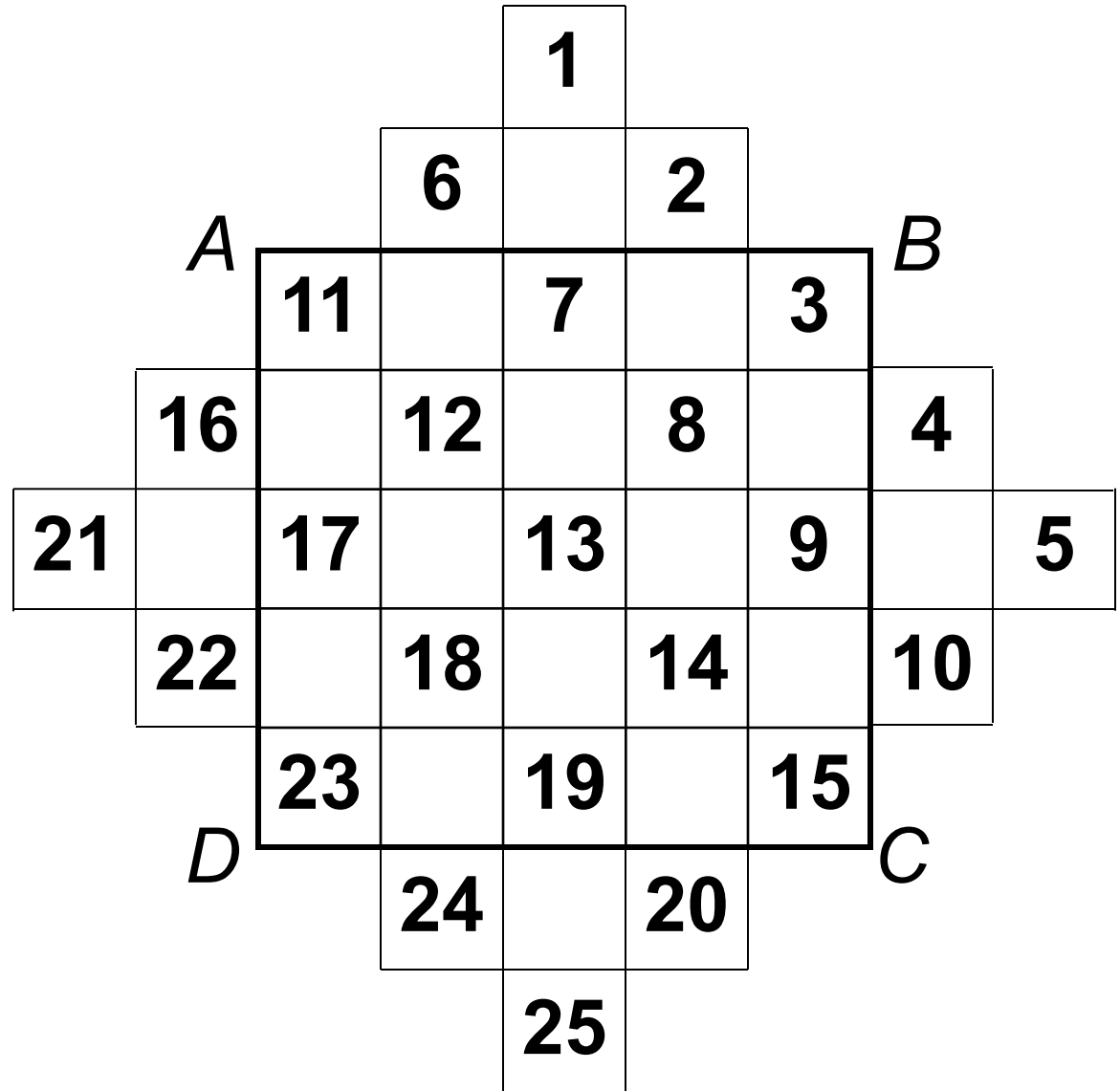
- Если все столбцы магического квадрата сделать строками, сохраняя их чередование, то есть - числа первого столбца в той же последовательности расположить в виде первой строки, числа второго столбца в виде второй строки и т.д., то квадрат останется магическим с теми же его свойствами.
 - При обмене местами отдельных строк или столбцов магического квадрата некоторые из вышеперечисленных его свойств могут исчезнуть, но могут и все сохраниться и даже появиться новые. Например, поменяем, местами первую и вторую строки данного квадрата, получим то, что показано на рисунке справа:
- | | | | |
|----|----|----|----|
| 1 | 14 | 15 | 4 |
| 12 | 7 | 6 | 9 |
| 8 | 11 | 10 | 5 |
| 13 | 2 | 3 | 16 |
- Суммы чисел вдоль строк и столбцов, конечно, не изменились, но суммы чисел вдоль диагоналей стали иными, не равными 34. Магический квадрат потерял часть своих основных свойств, стал «неполным» магическим квадратом (полумагическим квадратом).
 - Продолжая обменивать местами строки и столбцы квадрата, вы будете получать все новые и новые магические и полумагические квадраты из 16 чисел.

Как самому составить магический квадрат

- Если некоторое количество порядковых чисел, например, все целые числа от 1 до 16 или от 1 до 9, или от 1 до 25, или от 1 до 100 и т. д., расположены в форме квадрата так, что суммы чисел вдоль каждой строки, каждого столбца и каждой диагонали квадрата *одинаковы*, то такой квадрат, как было сказано, называется *магическим*, или *волшебным*.
- Количеством клеток (чисел) в каждом ряду магического квадрата определяет его *порядок*. Магический квадрат *третьего порядка* имеет в каждом ряду 3 клетки, магический квадрат *четвертого порядка* имеет в каждом ряду 4 клетки и т. д.

Квадраты нечетного порядка

- Строим, квадрат ABCD с 25 клетками и временно дополняем его до, симметричной ступенчатой фигуры со ступеньками в одну клетку.
- В полученной фигуре располагаем по порядку косыми рядами сверху вниз - направо 25 целых чисел от 1 до 25.
- А теперь каждое число, оказавшееся вне квадрата ABCD, следует перенести вдоль того же ряда или столбца ровно на столько клеток от той клетки, которую оно занимает, каков порядок квадрата, в нашем примере - на пять. Так, в соответствии с этим правилом переносим эти числа...



Как самому составить магический квадрат

Но у получившегося квадрата обнаруживается и дополнительное свойство: все пары чисел, расположенные симметрично относительно центральной клетки, дают одинаковые суммы.

Например:

$$1+25=19+7=18+8=23+3=6+20=2+24=4+22 \text{ и т. д.}$$

Магические квадраты, обладающие таким свойством, называются *симметричными*.

11	24	7	20	3
4	12	25	8	16
17	5	13	21	9
10	18	1	14	22
23	6	19	2	15

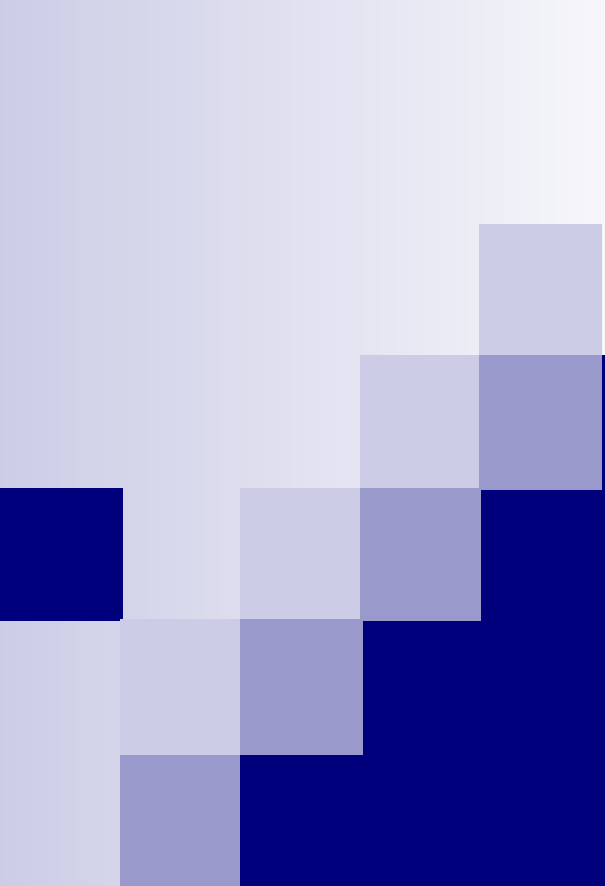
=26

Квадраты порядка, кратного четырем

Для составления какого-либо магического квадрата порядка $n=4, 8, 12, \dots, 4k$ удобна, например, такая простая схема:

- 1) Разместить числа в клетках заданного квадрата в порядке их возрастания (в натуральном порядке);
- 2) Выделить по углам заданного квадрата четыре квадрата со сторонами $n/4$ и в центре один квадрат со стороной $n/2$
- 3) В пяти выделенных квадратах обменять местами числа, расположенные симметрично относительно центра заданного квадрата; это значит, что в натуральном расположении чисел квадрата *четвертого* порядка надо поменять местами 1 и 16, 4 и 13, 6 и 11, 7 и 10.
- 4) Квадраты, составленные по указанной схеме, будут всегда *магическими симметрическими*.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16



Конец