



Многогранники: виды задач и методы их решения (типовые задания С2)

- 1

**Методическая разработка Амачкиной А.А.
МОУ СОШ №12,
г. Балашиха, Московской области.**

1.1. Расстояние между двумя точками

Расстояние между точками A и B можно вычислить:

1) как длину отрезка AB , если отрезок AB удастся включить в некоторый треугольник в качестве одной из его сторон;

$$\rho(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2},$$

2) по формуле

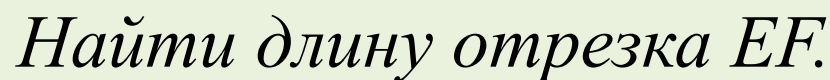
$$\text{где } A(x_1, y_1, z_1), \quad B(x_2, y_2, z_2);$$

3) по формуле

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}}, \quad \text{или} \quad |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2},$$

$$\text{где } \{a, b, c\} - \text{координаты вектора } \overrightarrow{AB}$$

Пример 1. *метод*

$$\mathbf{D}_1 \mathbf{E} = \frac{1}{3} \mathbf{A} \mathbf{D}_1, \quad \mathbf{D}_1 \mathbf{F} = \frac{2}{3} \mathbf{D}_1 \mathbf{B}_1.$$


Решение. Длину отрезка EF найдем по теореме косинусов из треугольника $D_1 EF$ в котором

$$D_1 F = \frac{2}{3} \sqrt{2}, D_1 E = \frac{1}{3} \sqrt{2}, \angle F D_1 E = \frac{\pi}{3}$$

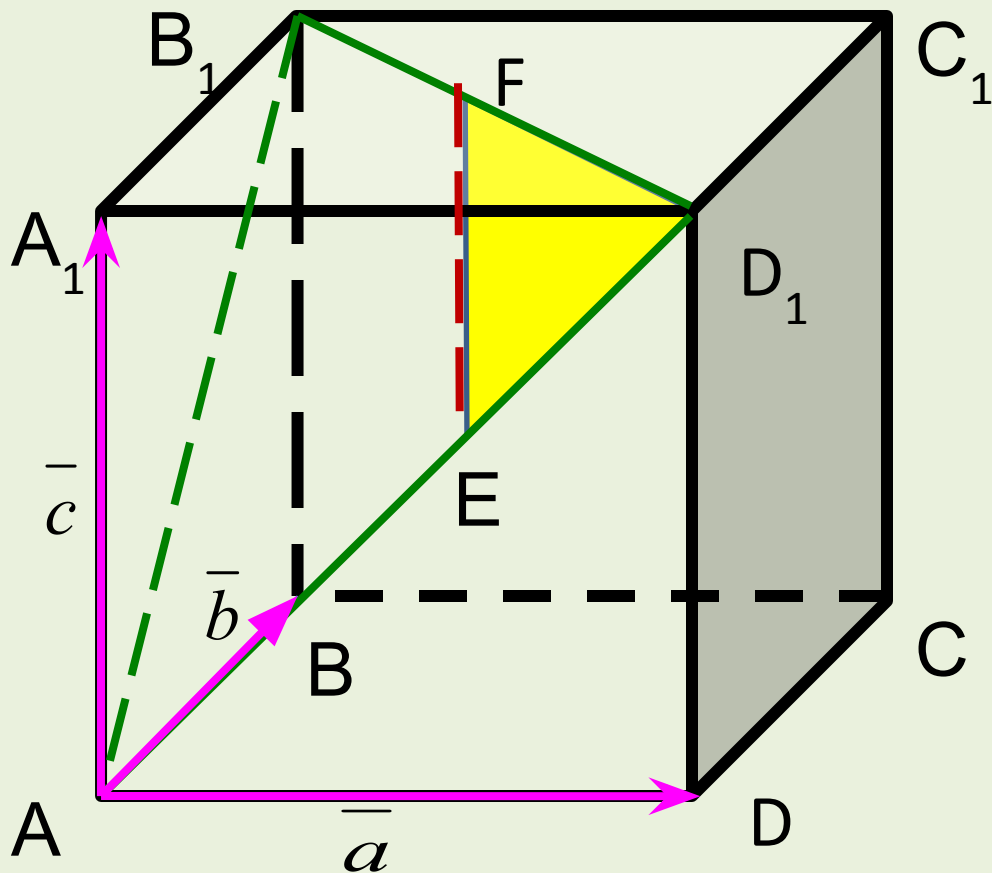
(треугольник $AB_1 D_1$ является равносторонним). Имеем

$$\begin{aligned} EF^2 &= D_1 E^2 + D_1 F^2 - 2 D_1 E * D_1 F * \cos \frac{\pi}{3} = \\ &= \frac{3}{9} + \frac{8}{9} - 2 * \frac{\sqrt{2}}{3} * \frac{2\sqrt{2}}{3} * \frac{1}{2} = \frac{2}{3}, \text{ Откуда } EF = \frac{\sqrt{6}}{3} \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{\sqrt{6}}{3}$

Векторный метод

Пример 1. В единичном кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ на диагоналях граней AD_1 и $D_1 B_1$ взяты точки E и F так, что $D_1 E = \frac{1}{3} AD_1$, $D_1 F = \frac{2}{3} D_1 B_1$.



Найти длину отрезка EF .

Решение. Пусть

$$\overline{AD} = \overline{a}, \quad \overline{AB} = \overline{b}, \quad \overline{AA_1} = \overline{c}, \quad \text{тогда}$$

$$|\overline{a}| = |\overline{b}| = |\overline{c}| = 1, \quad \overline{a} * \overline{b} = \overline{a} * \overline{c} = \overline{b} * \overline{c} = 0.$$

Выразим вектор $\overline{FE}$ через базисные векторы $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$:

$$\overline{FE} = \overline{EA} + \overline{AB_1} + \overline{B_1F} = -\frac{2}{3}(\overline{a} + \overline{c}) + (\overline{b} + \overline{c}) + \frac{1}{3}(\overline{a} - \overline{b}) =$$

$$= -\frac{1}{3}\overline{a} + \frac{2}{3}\overline{b} + \frac{1}{3}\overline{c}$$

$$|\overline{FE}| = \sqrt{\overline{FE}^2} = \sqrt{\left(-\frac{1}{3}\overline{a} + \frac{2}{3}\overline{b} + \frac{1}{3}\overline{c}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{4}{9} + \frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

Замечание.

Вектор $\overline{FE}$ в данном базисе имеет

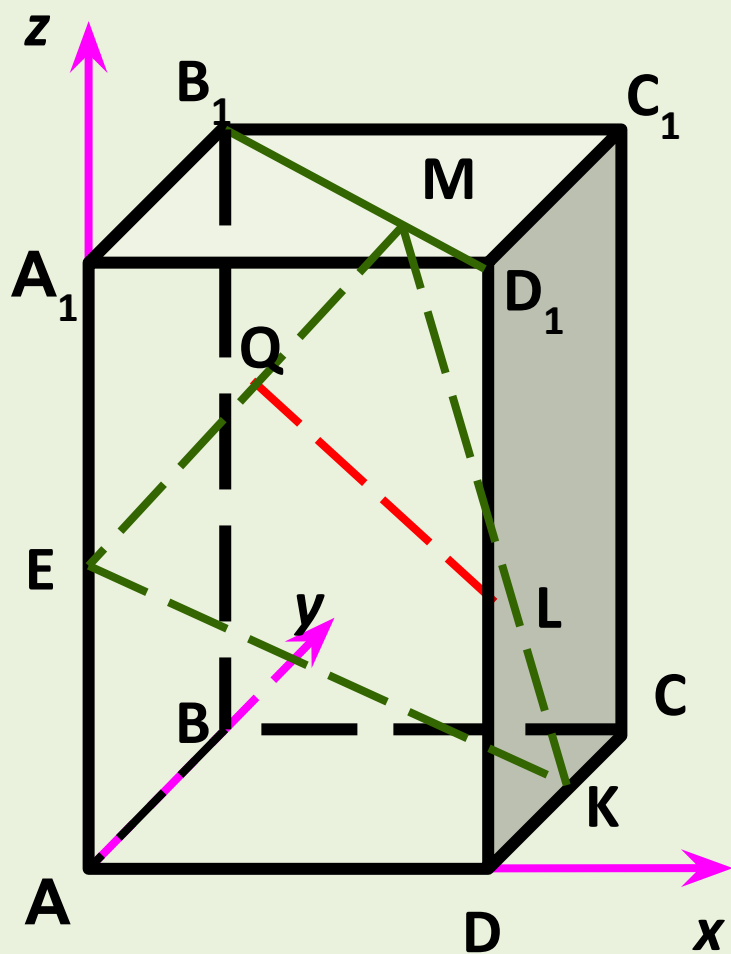
координаты $\left\{-\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right\}$, поэтому длину

этого вектора можно найти по

по формуле $|\overline{AB}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$, то есть

$$|\overline{AB}| = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{4}{9} + \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{6}{9}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

Координатный метод



Пример 2. В единичном кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ точки E и K – середины ребер AA_1 и CD соответственно, а точка M расположена на диагонали $B_1 D_1$ так, что $B_1 M = 2MD_1$. Найти расстояние между точками Q и L , где Q – середина отрезка EM , а L – точка отрезка MK такая, что $ML = 2LK$.

Решение. Введем прямоугольную систему координат

Тогда $E\left(0;0;\frac{1}{2}\right), K\left(1,\frac{1}{2};0\right), B(0,1,1), D_1(1,0,1)$.

Для нахождения координат точки M используем формулу координат точки (опорная задача 1), делящей отрезок $B_1 D_1$ в отношении 2:1. Имеем

$$M\left(\frac{0+2*1}{1+2}; \frac{1+2*0}{1+2}; \frac{1+2*1}{1+2}\right) = \left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; 1\right).$$

Аналогично получим координаты точки L, делящей отрезок MK в отношении 2:1. Имеем

$$L\left(\frac{\frac{2}{3}+2*1}{1+2}; \frac{\frac{1}{3}+2*\frac{1}{2}}{1+2}; \frac{1+2*0}{1+2}\right) = \left(\frac{8}{9}; \frac{4}{9}; \frac{1}{3}\right).$$

Координаты точки Q равны полусуммам соответствующих координат точек E и M, поэтому

$Q\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{6}; \frac{3}{4}\right)$. Применим формулу для расстояния между точками с заданными координатами

$$LQ = \sqrt{\left(\frac{1}{3} - \frac{8}{9}\right)^2 + \left(\frac{1}{6} - \frac{4}{9}\right)^2 + \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{725}{36^2}} = \frac{5\sqrt{29}}{36}$$

Ответ: $\frac{5\sqrt{29}}{36}$

Используемая литература:

Корянов А.Г., Прокофьев А.А. Многогранники: виды задач и методы их решения. МАТЕМАТИКА ЕГЭ 2011 (типовые задания С2)

Корянов А. Г., г. Брянск, akoryanov@mail.ru

Прокофьев А.А., г. Москва, aaprokof@yandex.ru