

Тема: Решение треугольника.

$$1 \angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$$

$$2 c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C - \text{теорема косинусов.}$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

$$3 \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \quad \text{где } R - \text{ радиус описанной окружности.}$$

$$R = \frac{abc}{4S\Delta} \quad r = \frac{2S\Delta}{P}, \text{ где } P - \text{ периметр, } r - \text{ радиус вписанной окружности.}$$

Площадь треугольника.

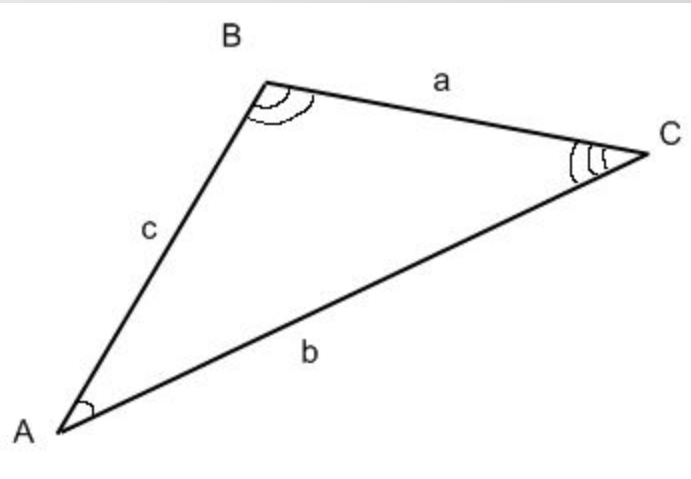
$$1. S\Delta = \frac{1}{2} ah_a \quad h_a = \frac{2S\Delta}{a}$$

$$2. S\Delta = \frac{1}{2} ab \sin \alpha$$

$$3. S\Delta = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}, \text{ где } P = \frac{a+b+c}{2}$$

$$4. S\Delta = \frac{1}{2} Pr \quad S\Delta = \frac{abc}{4R}$$

$$5. S\Delta = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \quad (\text{если треугольник правильный}).$$



Свойства медиан

Свойства медиан.

О – точка пересечения медиан.

$$\text{Тогда: } \frac{AO}{OA_1} = \frac{BO}{OB_1} = \frac{CO}{OC_1}$$

$$OC_1 = \frac{1}{2}OC \quad OC_1 = \frac{1}{3}CC_1$$

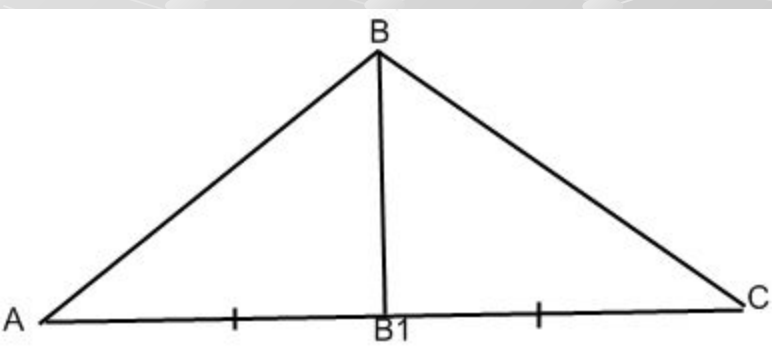
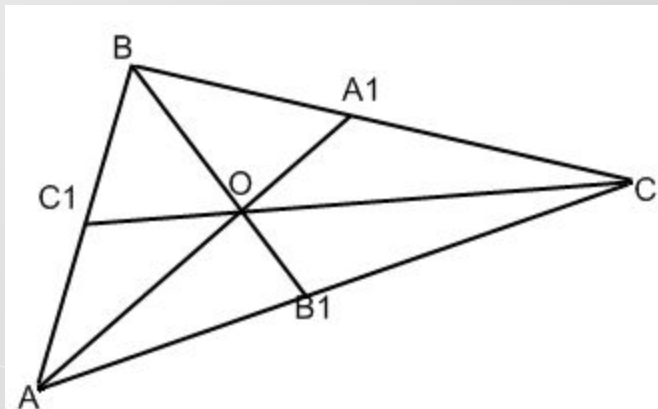
$$m_a \text{ медиана к стороне } a \quad m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$$

$$m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}$$

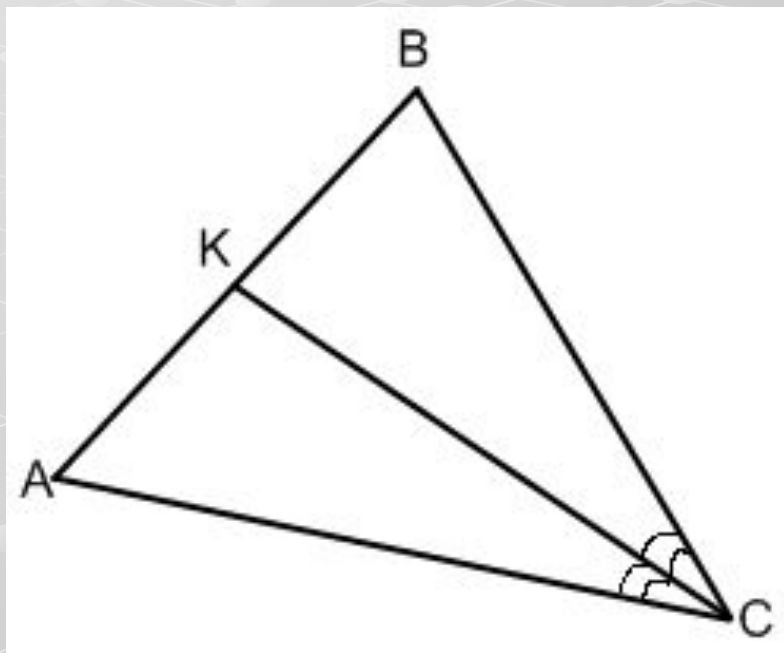
$$m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$$

В любом треугольнике медиана делит его на два равновеликих треугольника т.е. треугольники площади которых равны.

$$S_{ABB_1} = S_{BCB_1}$$



Биссектрисы треугольника.

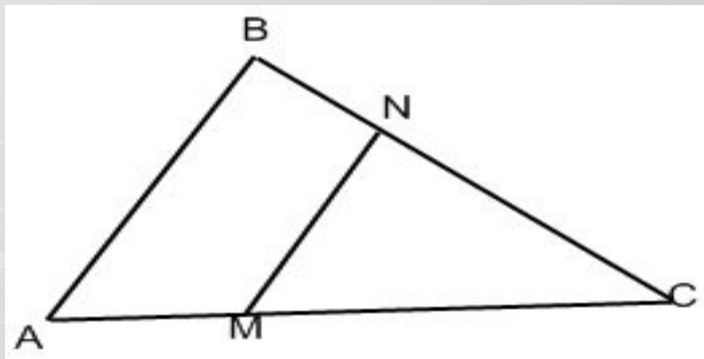


Биссектрисы треугольника.

1. Точка пересечения биссектрис треугольника является центром вписанной окружности.
2. Биссектриса треугольника делит сторону на части, пропорциональные двум другим соответственным сторонам.
Если CK - биссектриса, то

$$\frac{AK}{AC} = \frac{KB}{BC}$$

Подобные треугольники.



Подобные треугольники.

1. Прямая параллельная стороне треугольника, отсекает от него треугольник, подобный данному.

$$MN \parallel AB \quad \frac{MN}{AB} = \frac{CN}{BC} = \frac{MC}{AC} = k$$

$$\triangle MNC \sim \triangle ABC \quad \frac{S_{MNC}}{S_{ABC}} = k^2 \quad \frac{P_{MNC}}{P_{ABC}} = k$$

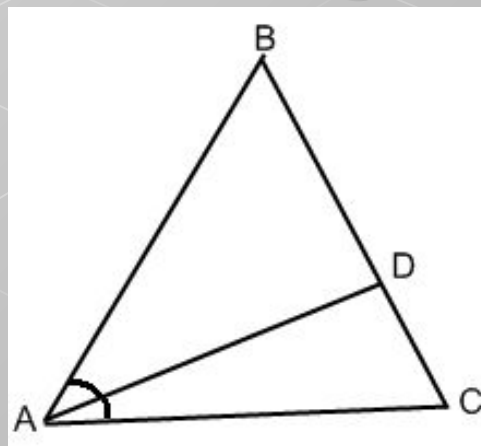
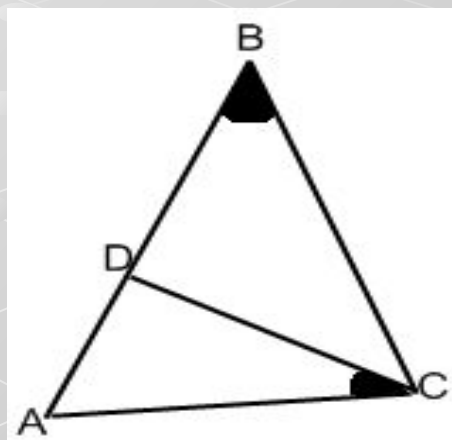
2. Сходственные стороны лежат против равных

$$\frac{AC}{AD} = \frac{BC}{DC} = \frac{AB}{AC}$$

углов подобных треугольников.

3. Если AD биссектриса, т.е.

$$\angle ABD = \angle CAD \quad , \text{ то } \frac{S_{ABD}}{S_{ADC}} = \frac{AB}{AC}$$



Задачи!

Задача 1.

Основание равнобедренного треугольника равно 30 см, а высота, проведённая из вершины основания 24 см.

Найти S треугольника.

Решение: $S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BK = \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot BK = 15BK$

1. $\triangle ACH$:

$$HC = \sqrt{AC^2 - AH^2} = \sqrt{30^2 - 24^2} = \sqrt{(30 - 24)(30 + 24)} = \sqrt{6 \cdot 54} = \sqrt{6 \cdot 6 \cdot 9} = 6 \cdot 3 = 18$$

2. $\triangle KBC$ прямоугольный, т.к. BK – высота и медиана равнобедренного треугольника, то $KC = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} 30 = 15$

3. $\triangle AHC \sim \triangle BKC$

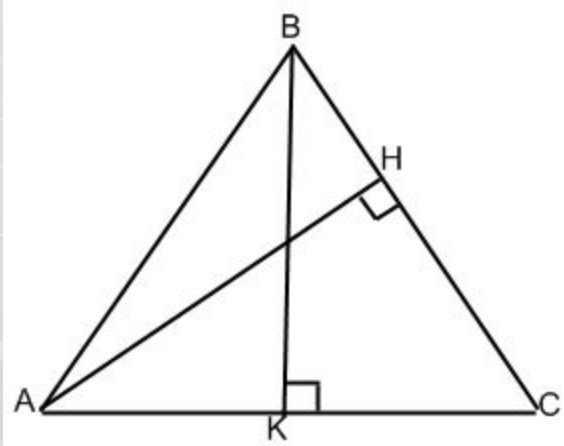
как прямоугольные с общим острым

углом $\angle C$

Тогда: $\frac{BK}{AH} = \frac{KC}{HC} \Rightarrow BK \frac{AH \cdot KC}{HC} = \frac{24 \cdot 15}{18} = 20$

4. $S_{\triangle} = 15BK = 15 \cdot 20 = 300 (см^2)$

Ответ. $300 см^2$



Задача 2.

В $\triangle ABC$

проведена медиана AM

Найти S_{ABC}

если $AC = 3\sqrt{2}$ $BC = 10$ $\angle MAC = 45^\circ$

Решение: $S_{ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AC \sin C$

$$\triangle AMC : MC = \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2} 10 = 5$$

По теореме косинусов:

$$MC^2 = AC^2 + AM^2 - 2AC \cdot AM \cos 45^\circ$$

$$5^2 = (3\sqrt{2})^2 + AM^2 - 2 \cdot 3\sqrt{2} \cdot AM \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$25 = 18 + AM^2 - 6AM$$

$$AM^2 - 6AM - 7 = 0$$

$$AM = \chi,$$

$$\chi > 0$$

$$\chi^2 - 6\chi - 7 = 0$$

$$\chi_1 = 7, \chi_2 = -1$$

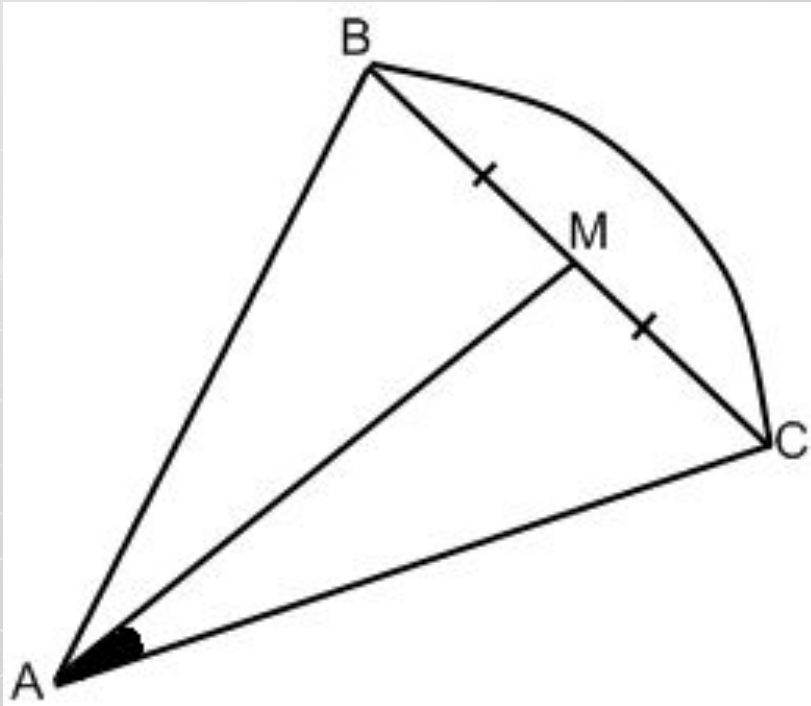
посторонний корень, т.е. не удовлетворяет
смыслу задачи.

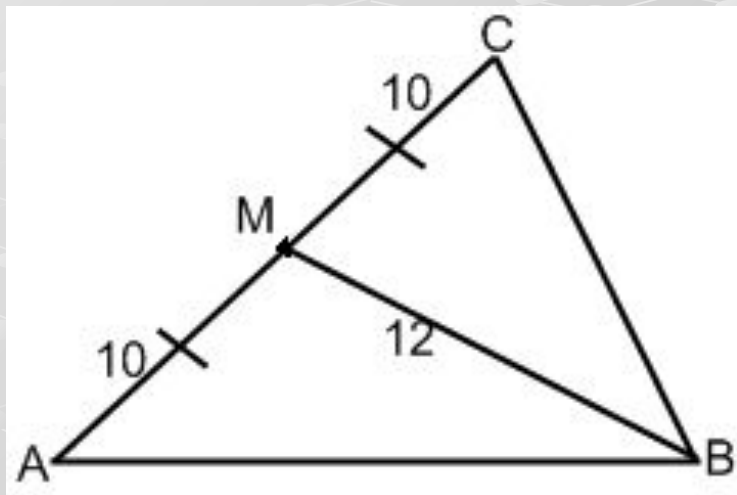
$$AM=7, \frac{AM}{\sin C} = \frac{MC}{\sin 45^\circ},$$

$$\sin C = \frac{AM \sin 45^\circ}{MC} = \frac{7 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{5} = \frac{7\sqrt{2}}{10}$$

$$\text{Тогда } S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot 10 \cdot \frac{7\sqrt{2}}{10} = 3 \cdot 7 = 21$$

Ответ. 21





Задача 3.

Найти площадь треугольника, если

$$AC = 20 \quad BC = 2\sqrt{97}, \text{ а медиана } BM = 12$$

Решение: BM – медиана, значит $AM = MC = 10$.

Медиана делит $\triangle ABC$
на два равнобедренных
треугольника

$$\text{Значит } S_{ABC} = S_{BMC}$$

$$\text{Тогда } S_{ABC} = 2S_{BMC}$$

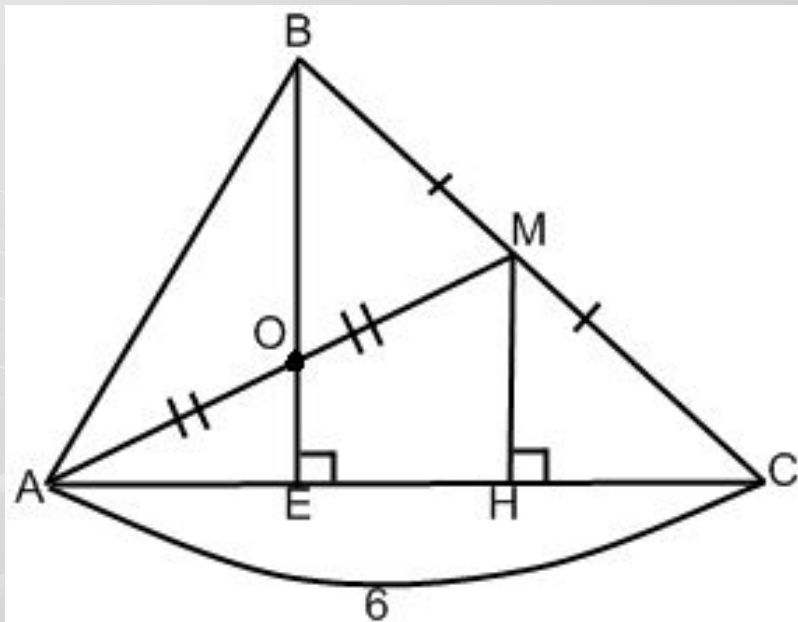
$$S_{MBC} = P\sqrt{P(P-MC)(P-BC)(P-MB)}$$

$$P = \frac{MC + MB + BC}{2} = \frac{10 + 12 + 2\sqrt{97}}{2} = 11 + \sqrt{97}$$

$$\begin{aligned} S_{MBC} &= \sqrt{(11 + \sqrt{97})(11 + \sqrt{97} - 10)(11 + \sqrt{97} - 12)(11 + \sqrt{97} - 2\sqrt{97})} = \\ &= \sqrt{(11 + \sqrt{97})(1 + \sqrt{97})(\sqrt{97} - 1)(11 - \sqrt{97})} = \sqrt{(121 - 97)(97 - 1)} = \\ &= \sqrt{24 \cdot 96} = \sqrt{6 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 16} = 2 \cdot 6 \cdot 4 = 48 \end{aligned}$$

$$S_{ABC} = 2 \cdot 48 = 96$$

Ответ. 96



Задача 4.

Длина основания AC треугольника ABC равна 6, медиана AM=5. Высота BE делит медиану AM пополам. Найти S_{ABC}

AM – медиана, следовательно $S_{ABM} = S_{AMC}$

, значит $S_{ABC} = 2S_{AMC}$

$$S_{AMC} = \frac{1}{2} AC \cdot MH$$

$\triangle BEC$ – прямоугольный $MH \parallel AC$ и $BE \parallel AC$
следовательно $MH \parallel BE$,

так как M – середина BC, то по теореме Фалеса H – середина EC значит $MH = \frac{1}{2} BE$
(по свойству средней линии).

Так как $AO = OM$ – по условию, $AE = EH$.

Значит, $AE = EH = HC = \frac{1}{3} AC = \frac{1}{3} \cdot 6 = 2$

$$\triangle AMH \quad AH = 4, AM = 5, MH = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$$

$$S_{ABC} = 2S_{AMC} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3 = 18$$

Ответ. 18

Самостоятельно

Решить самостоятельно:

1. В треугольнике ABC проведена медиана AM.

Найти: S_{ABC} если $AC = 3\sqrt{2}$ $BC = 10$ $\angle MAC = 45^\circ$

Ответ. 21

2. В треугольнике ABC проведена биссектриса BK, длина которой равна 4, причём

$$KC = 2\sqrt{2} \quad \angle BCA = 45^\circ$$

Найти S_{ABK}

Ответ. 4

3. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB=BC$) проведена биссектриса AD. $S_{ABD} = 3\sqrt{35}$

$S_{ADC} = \sqrt{35}$ Найти AC.

Ответ. AC=4.

4. Точка M лежит на стороне AO треугольника

AOM, $AH = 4$, $OH = 12$, $\angle A = 30^\circ$, $\angle AMH = \angle AOM$

Найти. S_{AMH}

Ответ. 8

5. В треугольнике ABC $AB=BC=15$, $CA=24$.

Найти расстояние между точкой пересечения серединных перпендикуляров и точкой пересечения медиан треугольника.

Ответ. 44