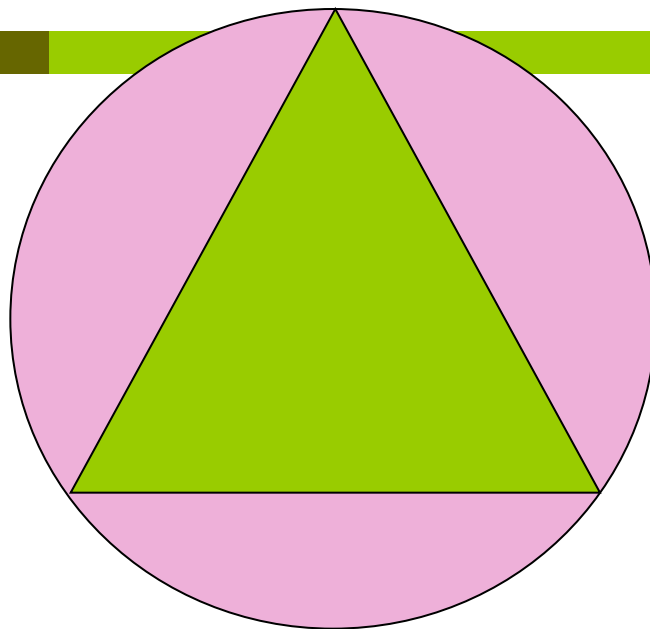


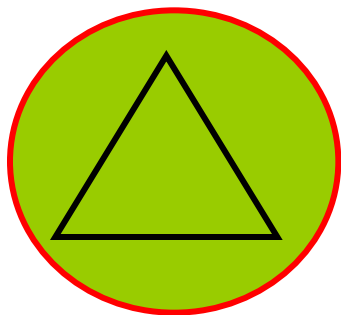
Описанная окружность



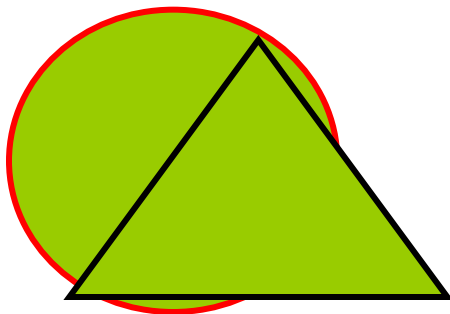
Определение: **окружность называется описанной около треугольника, если все вершины треугольника лежат на этой окружности.**

На каком рисунке окружность описана около треугольника:

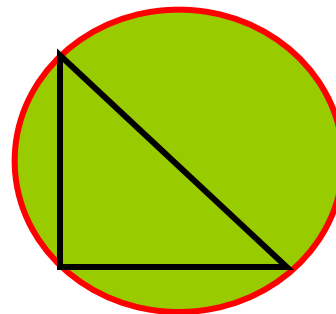
1)



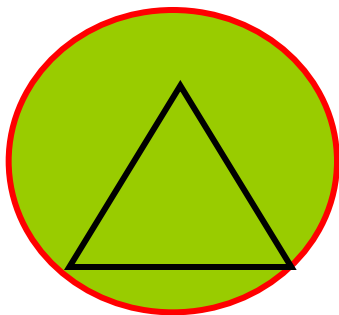
2)



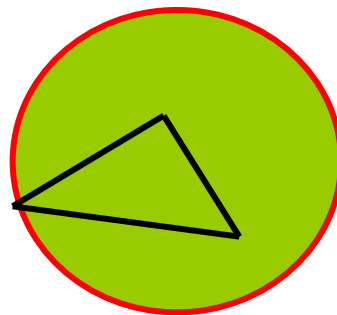
3)



4)



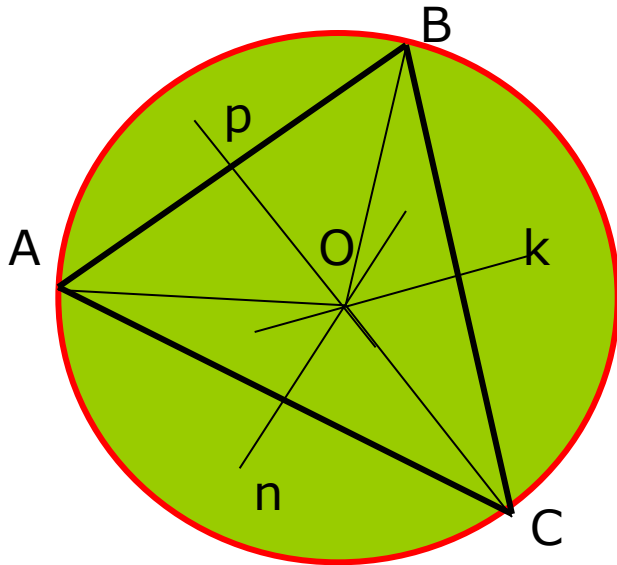
5)



Если окружность описана около треугольника, то треугольник вписан в окружность.

Теорема. **Около треугольника можно описать окружность, и притом только одну.**

**Её центр – точка пересечения
серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.**



Дано: $\triangle ABC$

Доказать: существует Окр.(O; r),
описанная около $\triangle ABC$.

Доказательство:

Проведём серединные перпендикуляры
p, k, n к сторонам AB, BC, AC

По свойству серединных перпендикуляров к сторонам треугольника (замечательная точка треугольника):

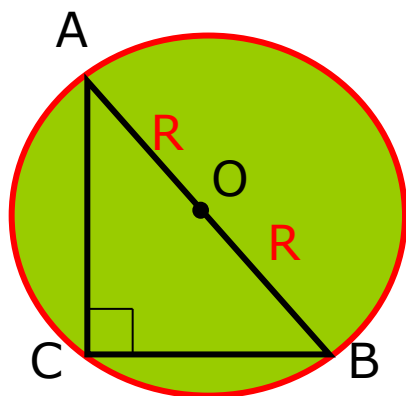
они пересекаются в одной точке – O, для которой $OA = OB = OC$.

Т. е. все вершины треугольника равноудалены от точки O, значит, они лежат на окружности с центром O.

Значит, окружность описана около треугольника ABC.

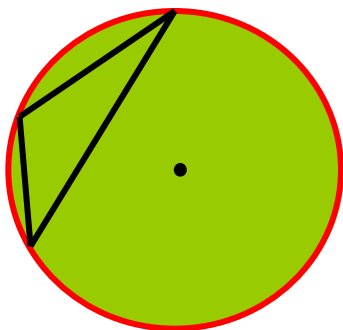
Важное свойство:

Если окружность описана около прямоугольного треугольника, то её центр – середина гипотенузы.



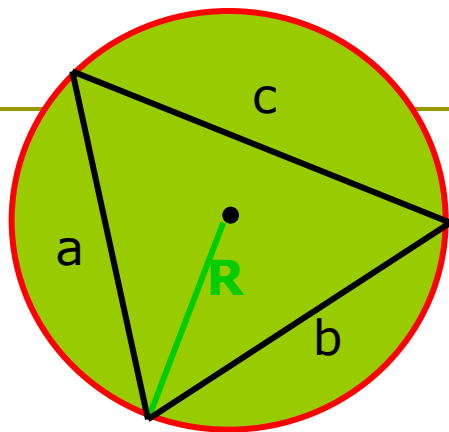
$$R = \frac{1}{2} AB$$

Задача: найти радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника, катеты которого равны 3 см и 4 см.



Центр окружности, описанной около тупоугольного треугольника, лежит вне треугольника.

Формулы для радиуса описанной около треугольника окружности



$$R = \frac{a \cdot b \cdot c}{4S}$$

$$R = \frac{a}{2\sin\alpha} = \frac{b}{2\sin\beta} = \frac{c}{2\sin\gamma}$$

Задача: найти радиус окружности, описанной около равностороннего треугольника, сторона которого равна 4 см.

Решение:

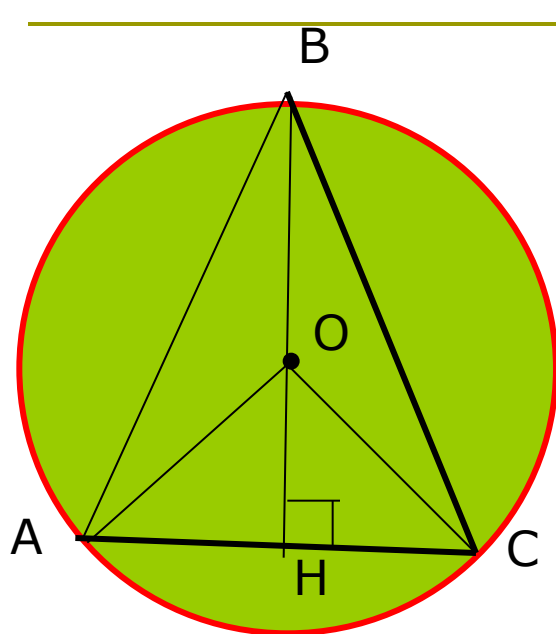
$$R = \frac{a \cdot b \cdot c}{4S}, \quad R = \frac{a^3}{4S}$$

$$S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{4^2 \sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}$$

$$R = \frac{4^3}{4 \cdot 4\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3} \text{ (см)}$$

$$\text{Ответ: } \frac{4\sqrt{3}}{3} \text{ см}$$

Задача: в окружность, радиус которой 10 см, вписан равнобедренный треугольник. Высота, проведённая к его основанию равна 16 см. Найти боковую сторону и площадь треугольника.



Дано: $\triangle ABC$ - р/б, $BH \perp AC$, $BH = 16$ см
Окр.(O; 10 см) описана около ABC

Найти: AB , S_{ABC}

Решение:

Т. к. окружность описана около равнобедренного треугольника ABC, то центр окружности лежит на высоте BH.

$$AO = BO = CO = 10 \text{ см}, OH = BH - BO = 16 - 10 = 6 \text{ (см)}$$

$\triangle AOH$ – прямоугольный, $AO^2 = AH^2 + OH^2$, $AH^2 = 10^2 - 6^2 = 64$, $AH = 8$ см

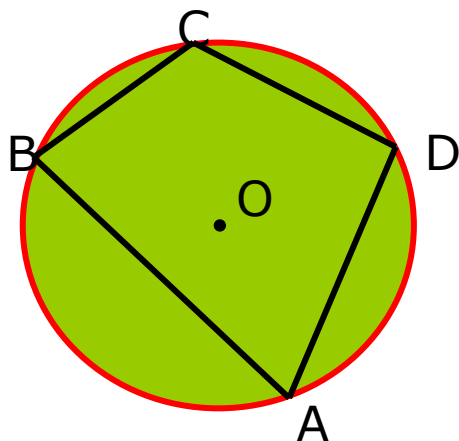
$$ABH \text{ – прямоугольный, } AB^2 = AH^2 + BH^2 = 8^2 + 16^2 = 64 + 256 = 320, \\ AB = \sqrt{320} = 8\sqrt{5} \text{ (см)}$$

$$AC = 2AH = 2 \cdot 8 = 16 \text{ (см)}, S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BH = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 16 = 128 \text{ (см}^2\text{)}$$

Ответ: $AB = 8\sqrt{5}$ см , $S = 128 \text{ см}^2$

Определение: **окружность называется описанной около четырёхугольника, если все вершины четырёхугольника лежат на окружности.**

Теорема. **Если около четырёхугольника описана окружность, то сумма его противоположных углов равна 180° .**



Дано: Окр.(O;R) описана около ABCD

Доказать: $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180^\circ$

Доказательство:

Т. к. окружность описана около ABCD, то $\angle A, \angle B, \angle C, \angle D$ – вписанные, значит,

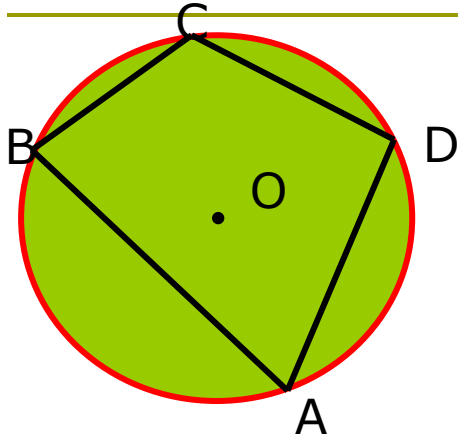
$$\angle A + \angle C = \frac{1}{2} \angle BCD + \frac{1}{2} \angle BAD = \frac{1}{2} (\angle BCD + \angle BAD) = \frac{1}{2} \cdot 360^\circ = 180^\circ$$

$$\angle B + \angle D = \frac{1}{2} \angle ADC + \frac{1}{2} \angle ABC = \frac{1}{2} (\angle ADC + \angle ABC) = \frac{1}{2} \cdot 360^\circ = 180^\circ$$

Значит, $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180^\circ$

Другая формулировка теоремы: **во вписанном в окружность четырёхугольнике сумма противоположных углов равна 180° .**

Обратная теорема: **если сумма противоположных углов четырёхугольника равна 180° , то около него можно описать окружность.**



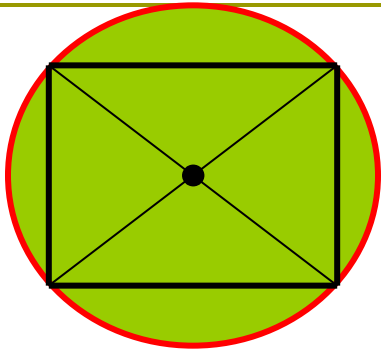
Дано: ABCD, $\angle A + \angle C = 180^\circ$

Доказать: Окр.(O;R) описана около ABCD

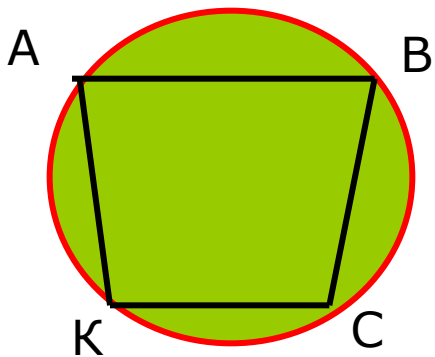
Доказательство: № 729 (учебник)

Вокруг какого четырёхугольника нельзя описать окружность?

Следствие 1: **около любого прямоугольника можно описать окружность, её центр – точка пересечения диагоналей.**



Следствие 2: **около равнобедренной трапеции можно описать окружность.**



Реши задачи

Найти углы четырёхугольника РКЕН:

