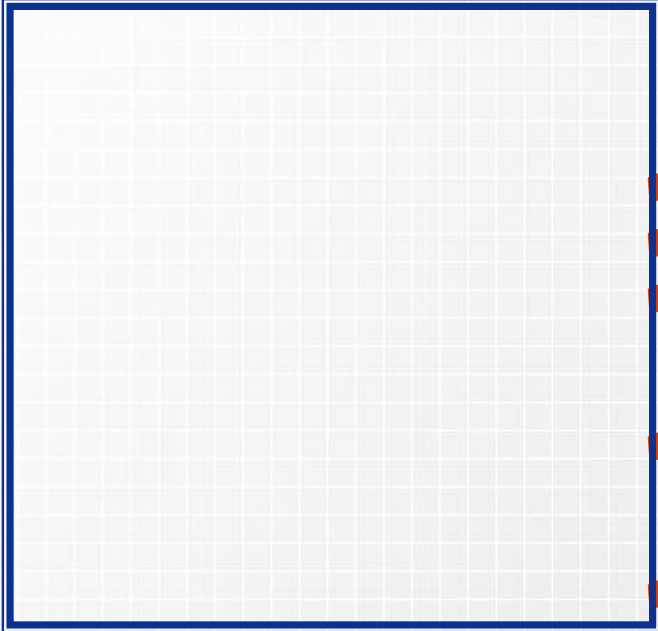


Пирамиды

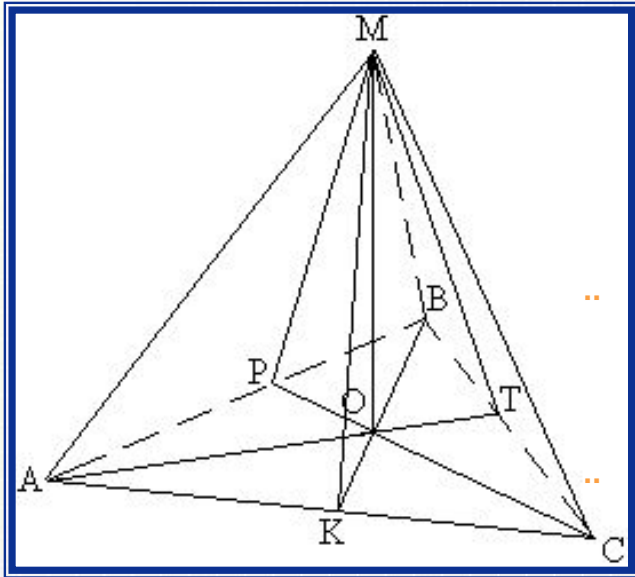


Что такое?

- 
- ✓ **Пирамидой** ($SABCD$) называется многогранник, который состоит из плоского многоугольника - **основания пирамиды** ($ABCD$), **точка S** , не лежащая в плоскости основания, - **вершиной пирамиды** и всех отрезков, соединяющих вершину пирамиды с точками основания.
 - ✓ Треугольники **SAB, SBC, SCD, SDA** - **боковые грани**.
 - ✓ Прямые **SA, SB, SC, SD** - **боковые ребра** пирамиды.
 - ✓ Перпендикуляр **SO** , опущенный из вершины на основание, называется **высотой** пирамиды и обозначается **H** .
 - ✓ Пирамида называется **правильной**, если ее основание - правильный многоугольник, а высота ее проходит через центр основания.
 - ✓ Боковые грани правильной пирамиды - равнобедренные треугольники, равные между собой.
 - ✓ Высота боковой грани правильной пирамиды - **апофема** пирамиды.
 - ✓ Треугольная пирамида называется **тетраэдром**.

Правильная пирамида

Отметим некоторые свойства правильной n-угольной пирамиды на примере треугольной пирамиды. Как известно центр правильного треугольника совпадает с центром вписанной и описанной около него окружности. Поэтому отрезки AO , BO и CO равны как радиусы. Поэтому прямоугольные треугольники AOM , BOM и COM равны по двум катетам (MO -общая). Из равенства этих треугольников следует равенство соответствующих сторон: $AM=BM=CM$



Свойство 1: В правильной n-угольной пирамиде все боковые ребра равны между собой.

Из равенства ребер следует и равенство боковых граней. Треугольники ABM , BCM и ACM равны по трем сторонам.

Свойство 2: Все боковые грани правильной n-угольной пирамиды суть равные равнобедренные треугольники, поэтому все плоские углы при вершине равны, все плоские углы при основании равны.

Из равенства прямоугольных треугольников OPM , OTM и OKM ($OT=OP=OK$ как радиусы вписанной окружности; MO - общая) следует равенство всех двугранных углов при основании пирамиды $\angle POM=\angle OTM=\angle OKM$

Свойство 3: В правильной n-угольной пирамиде все двугранные углы при основании равны.

Формулы для пирамид

- ★ *Площадью полной поверхности* пирамиды называется сумма площадей всех её граней

$$S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + S_{\text{осн}};$$

- ★ *Площадь боковой поверхности пирамиды* – сумма площадей её боковых граней;

- ★ *Площадь боковой грани*

$$S_{\text{бок.гр}} = 1/2 \times m \times |g|,$$

где m – апофема, $|g|$ – основание грани;

- ★ *Теорема:* Площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна половине произведения периметра основания на апофему

$$S_{\text{бок}} = 1/2 \times (P_{\text{осн}} \times m),$$

где m – апофема, P – периметр многоугольника основания;

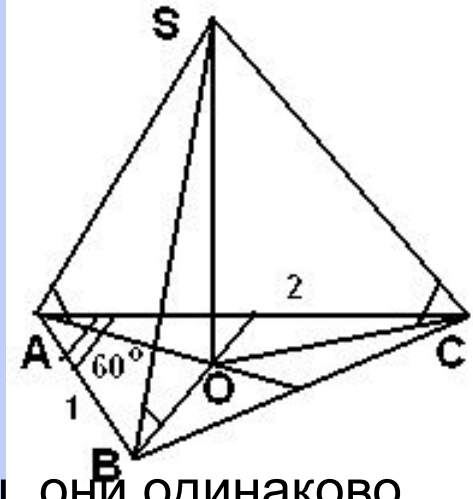
- ★ *Объём пирамиды*

$$V = (1/3) \times S_{\text{осн}} \times h.$$

Задача

❖ **Задача 1:** Основание пирамиды – треугольник, две стороны которого равны 1 и 2, а угол между ними равен 60° . Каждое боковое ребро равно $\sqrt{13}$.

Найдите объем пирамиды.



Решение. Так как все ребра (боковые) пирамиды равны, они одинаково наклонены к основанию, и вершина пирамиды проектируется в центр описанной вокруг основания окружности. (см. чертеж).

Объем пирамиды: $V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot h$, $S_{\text{осн}} = \frac{1}{2} BA \cdot BC \cdot \sin \angle A$, $S_{\text{осн}} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Высоту SO можно найти по т. Пифагора например, из треугольника ASO. Для этого нужно найти AO – радиус описанной окружности основания.

Воспользуемся теоремой синусов: $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$. Но сначала по

теореме косинусов найдем сторону BC: $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos 60^\circ$,

$$BC^2 = 1 + 4 - 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 3 \quad BC = \sqrt{3}.$$

Теперь вычислим радиус описанной окружности: $R = \frac{BC}{2 \sin \angle A} = \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot \sqrt{3}/2} = 1$

Найдем SO: $SO = \sqrt{AS^2 - AO^2} = \sqrt{13 - 1} = 2\sqrt{3}$.

Вычислим объем: $V = \frac{1}{3} \cdot 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 1$.

Ответ: $V=1$.

А под конец...

Слово «пирамида» в геометрию ввели греки, которые, как полагают, заимствовали его у египтян, создавших самые знаменитые пирамиды в мире. Другая теория выводит этот термин из греческого слова «пирос» (рожь) – считают, что греки выпекали хлебцы, имевшие форму пирамиды

