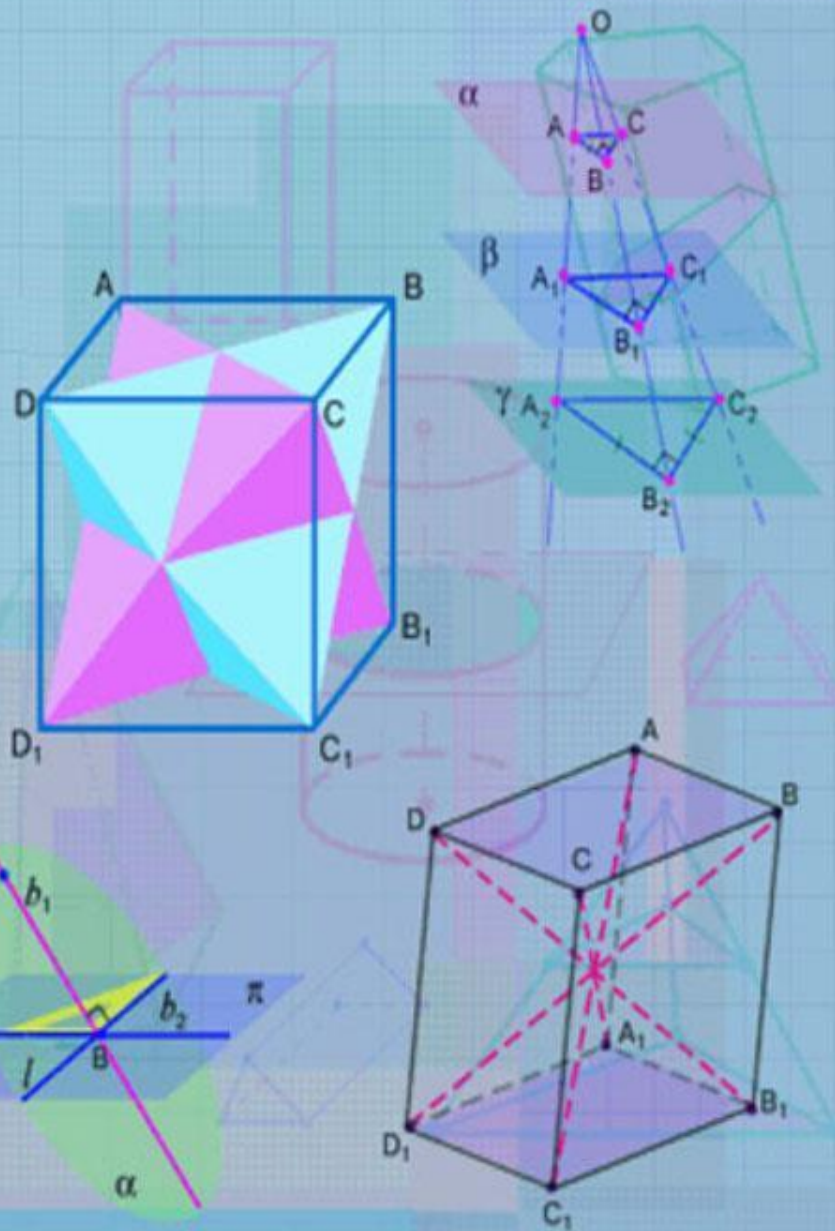
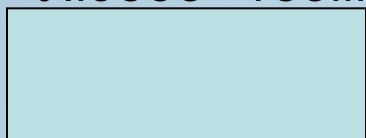


Понятие объема. Объем призмы.

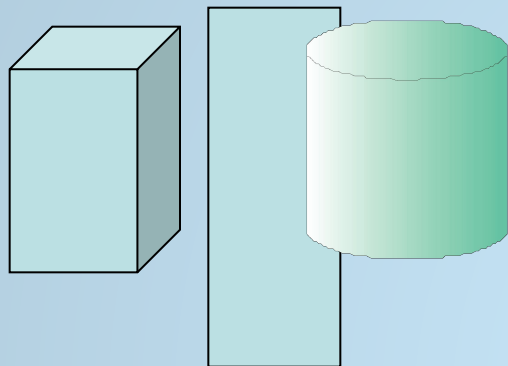
Геометрия,
11 класс



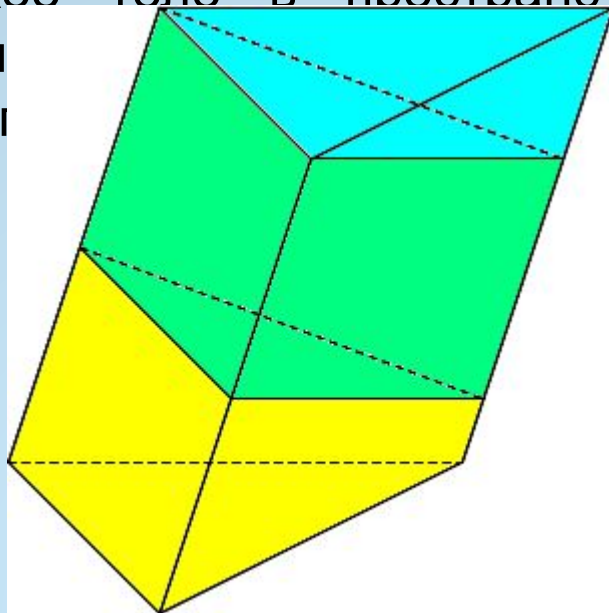
Любое геометрическое тело в пространстве характеризуется же такое – объем



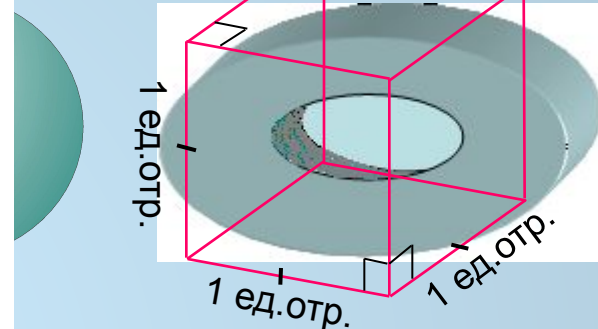
называем
пространственной фи



$$V_1 = V_2$$



$$V = V_1 + V_2 + V_3$$

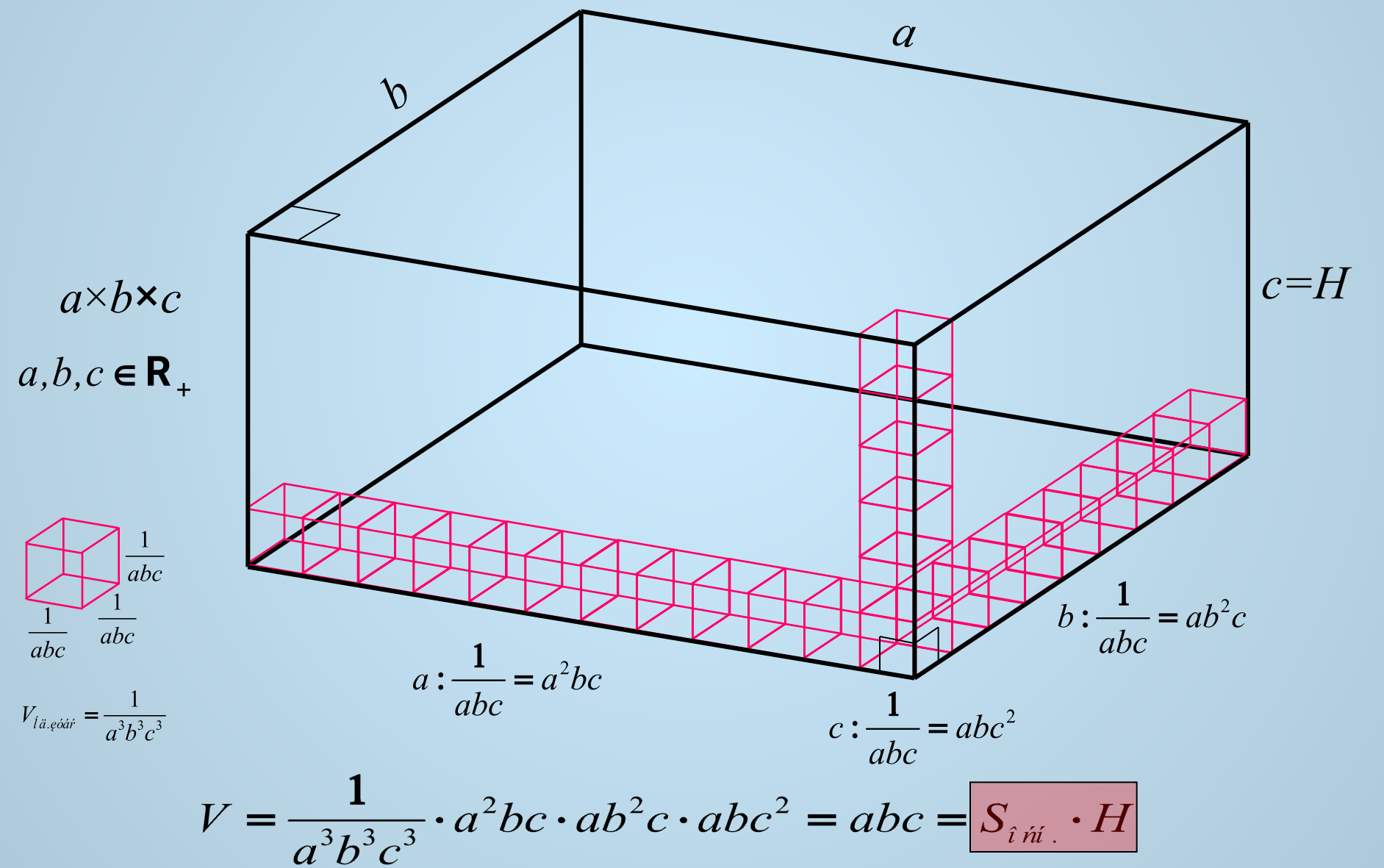


$$V = 1 \text{ куб.ед.}$$

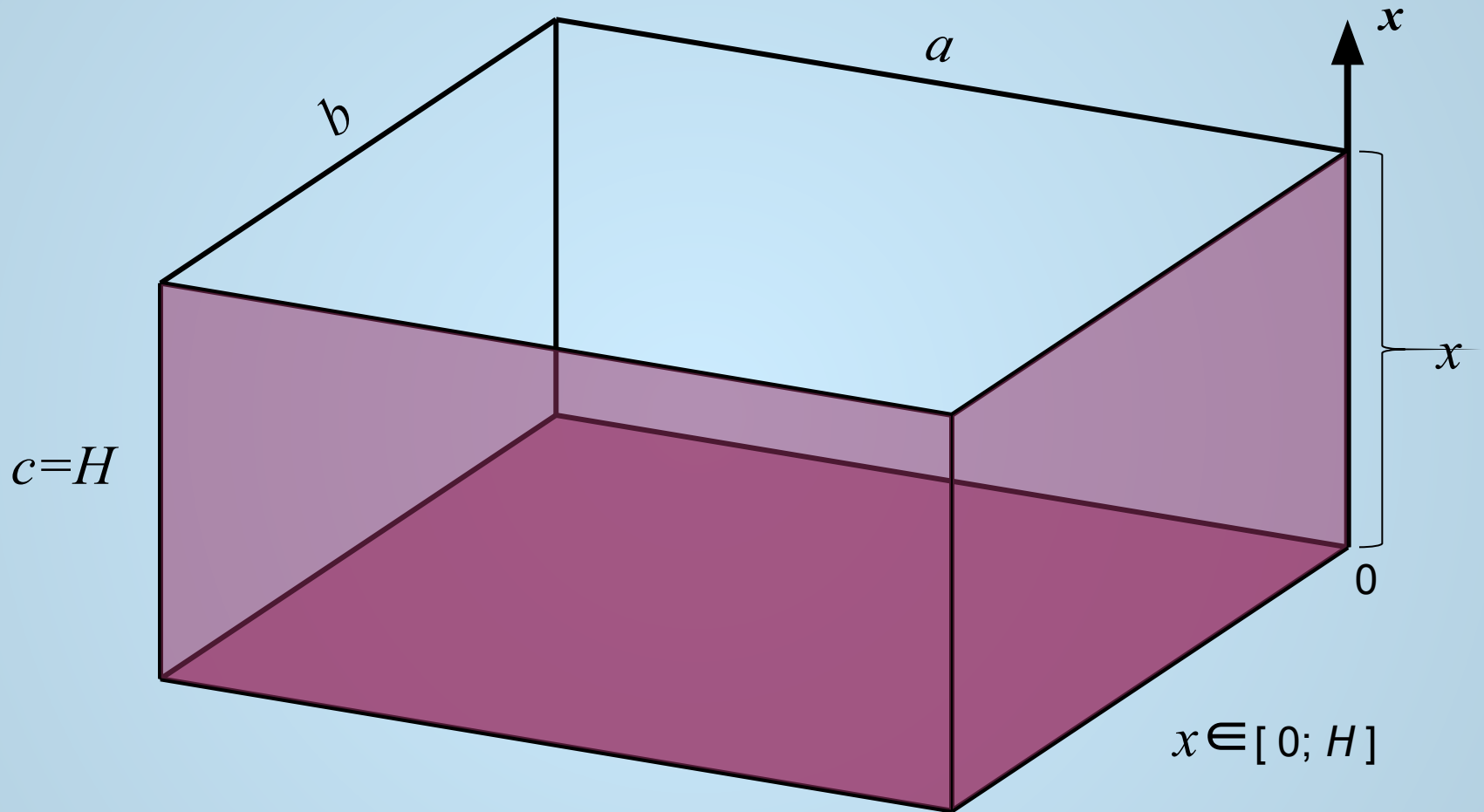
Под объемом пространственной фигуры понимается положительная величина, обладающая следующими свойствами:

- 1) равные фигуры имеют равные объемы;
- 2) объем фигуры равен сумме объемов ее частей;
- 3) объем куба с ребром единичной длины равен одной кубической единице.

Самым естественным образом определяется объем прямоугольного параллелепипеда, как геометрического тела составленного из определенного количества единичных кубов. А значит, его объем определяется как сумма объемов этих единичных кубов.



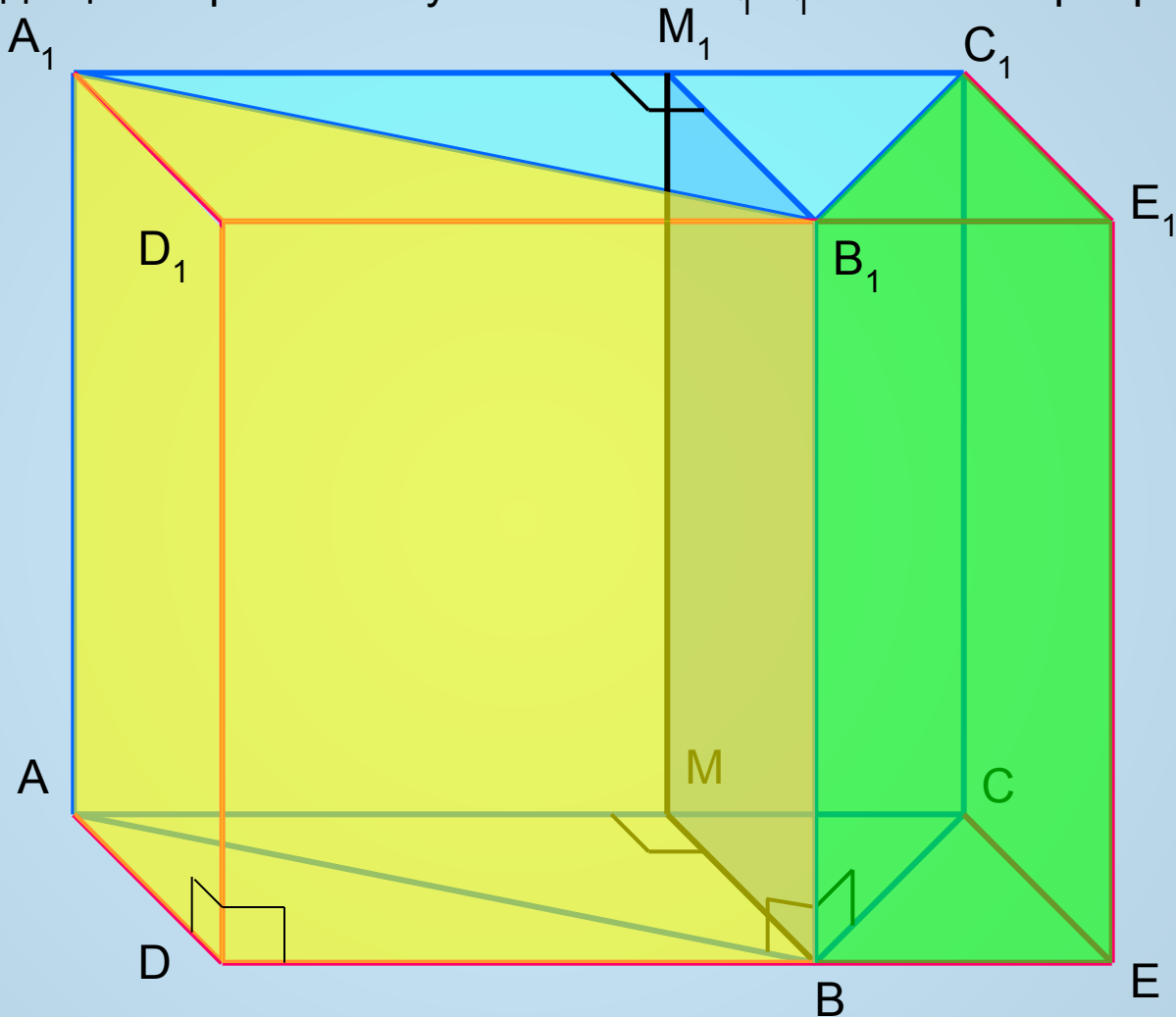
Эту же формулу объема прямоугольного параллелепипеда можно получить пользуясь понятием бесконечной интегральной суммы. Объем прямоугольного параллелепипеда можно понимать как бесконечную сумму площадей основания, взятых вдоль его высоты.



$$V = \int_0^H S_{\text{осн.}} dx = S_{\text{осн.}} \int_0^H dx = S_{\text{осн.}} \cdot x \Big|_0^H = \boxed{S_{\text{осн.}} \cdot H}$$

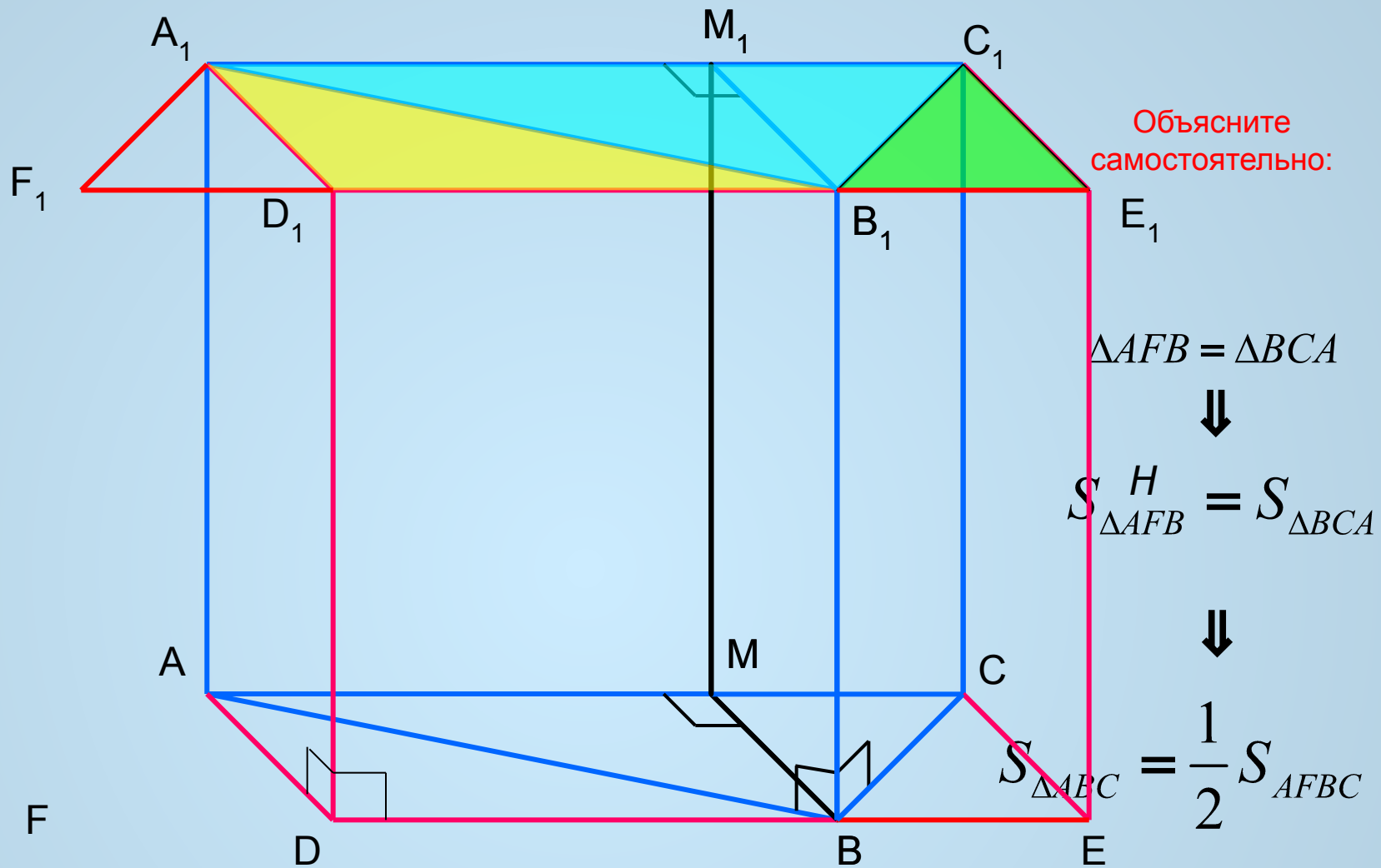
Рассмотрим произвольную треугольную прямую призму $ABCA_1B_1C_1$.

1) Разобьем призму на две прямые треугольные призмы $ABMA_1B_1M_1$ и $BCMB_1C_1M_1$ плоскостью, проходящей через высоту основания B_1M_1 и боковое ребро BB_1 .



2) Достроим данную призму до прямоугольного параллелепипеда $ADECA_1D_1C_1E_1$.

3) Получили ещё две прямые треугольные призмы $ADBA_1D_1B_1$ и $BECB_1E_1C_1$.



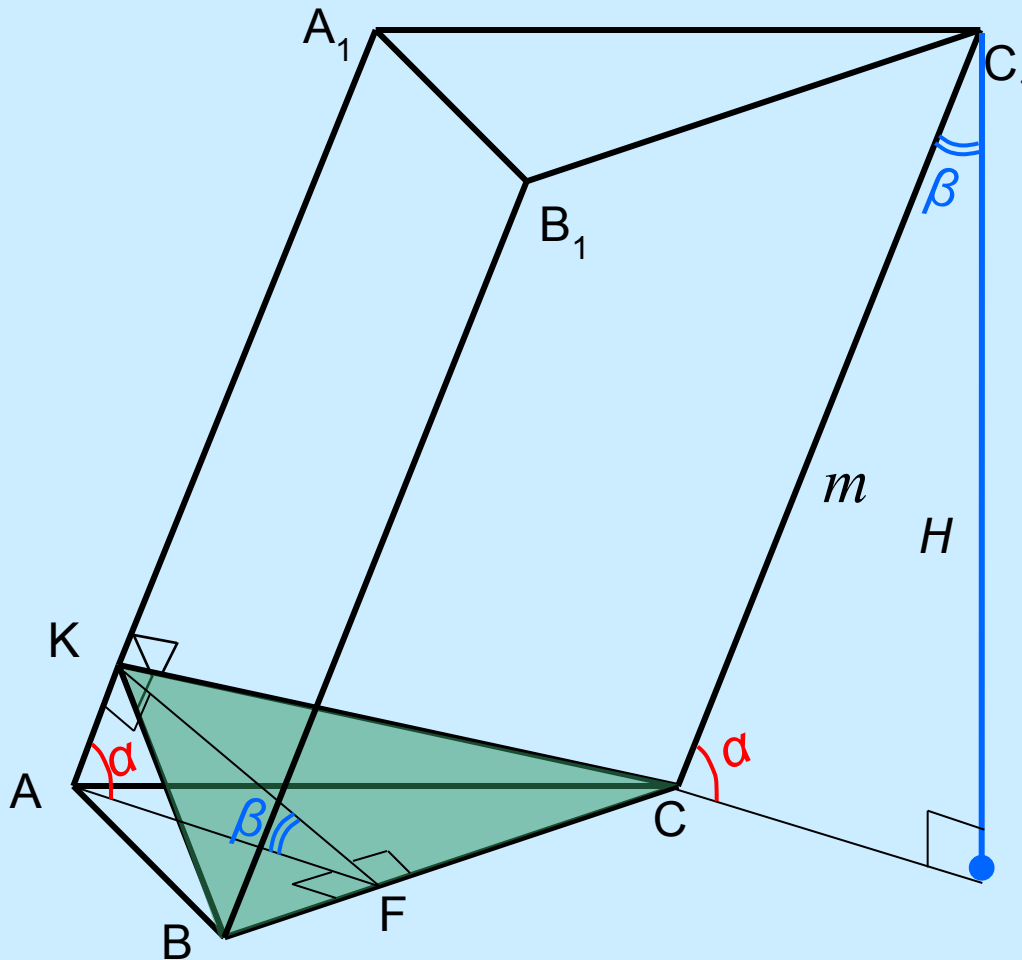
Нетрудно заметить, что объем треугольной призмы в два раза меньше объема прямоугольного параллелепипеда, т.е.

$$V_{\text{призма } A_1B_1C_1} = \frac{1}{2} V_{\text{параллелепипед } AFBCA_1F_1B_1C_1} = \frac{1}{2} S_{AFBC} \cdot H = S_{\Delta ABC} \cdot H = \boxed{S \cdot H}$$

Пусть дана наклонная треугольная призма. Построим сечение, перпендикулярное боковому ребру ($\square ВКС$).

Примем $\angle KAF = \alpha$ за угол наклона бокового ребра к основанию призмы, а $\angle KFA = \beta$ – за угол между плоскостями основания и сечения. Очевидно, что $\alpha + \beta = 90^\circ$.

Сечение (KBC) разбивает призму на две пространственные фигуры – треугольную пирамиду KABC и многогранник KBCA₁B₁C₁. По свойству объема фигуры объем призмы равен сумме объемов этих частей.



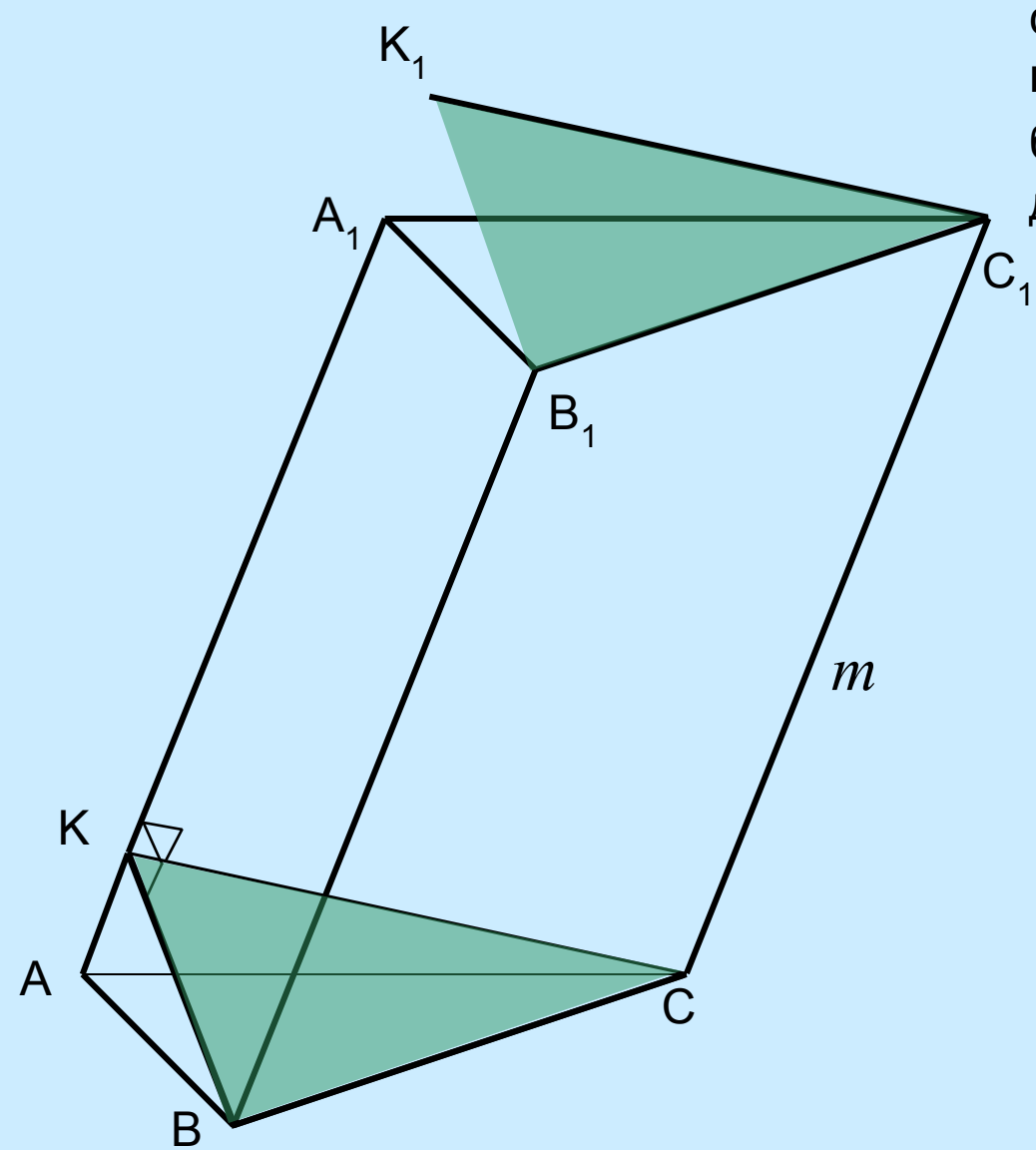
Вспомним, что:

$$\frac{H}{m} = \sin \alpha = \cos \beta$$

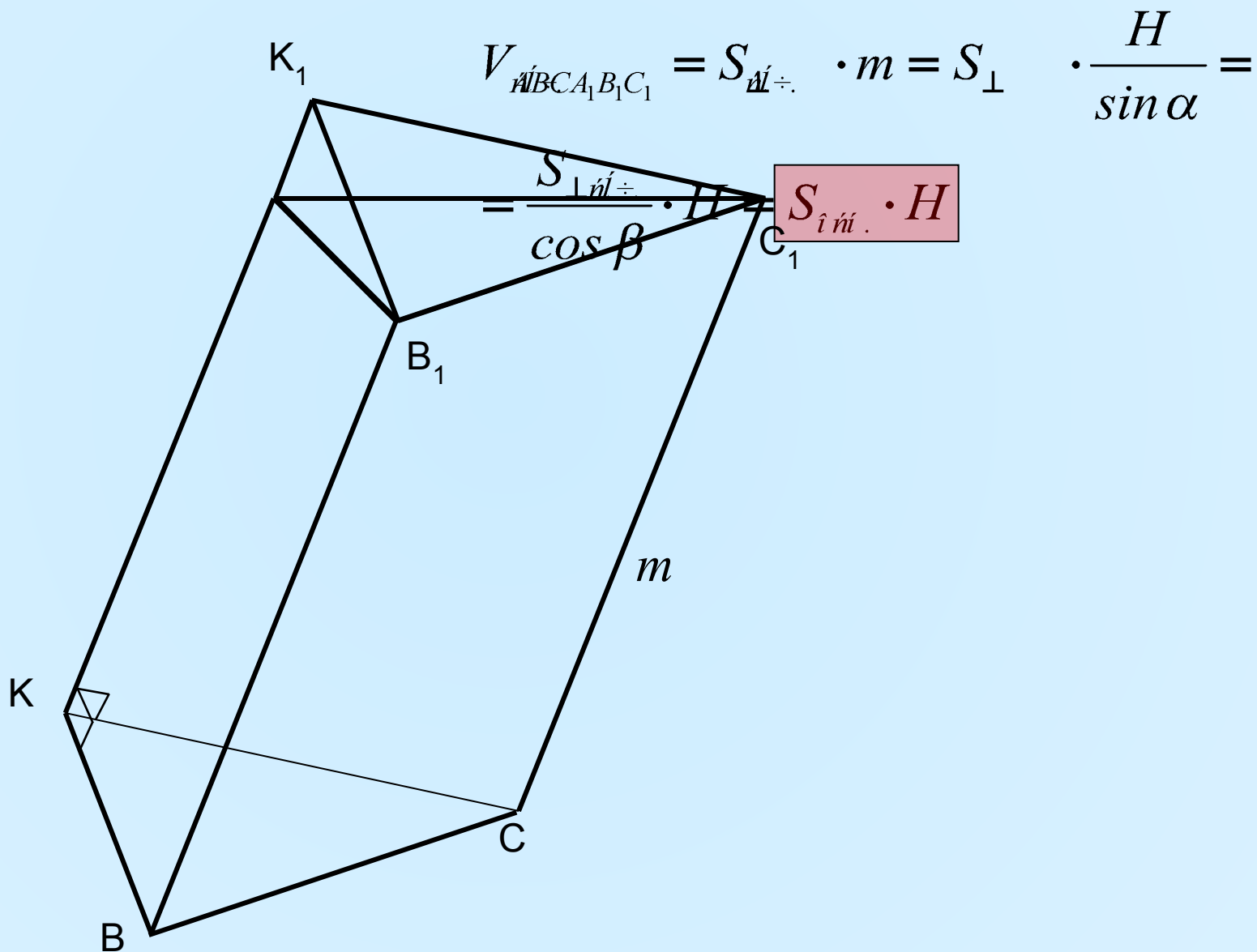
$$\frac{S_{\text{сеч.}}}{S_{\text{осн.}}} = \cos \beta = \sin \alpha$$

Перемещая соответствующим образом одну из частей можно получить прямую треугольную призму, равную по объему данной наклонной призме.

Тогда: $V_{ABCA_1B_1C_1} = V_{KBCK_1B_1C_1} = S_{\Delta KBC} \cdot m = S_{\perp \text{сеч.}} \cdot m$, где $S_{\perp \text{сеч.}}$ – площадь сечения, перпендикулярного боковому ребру и m – длина бокового ребра.

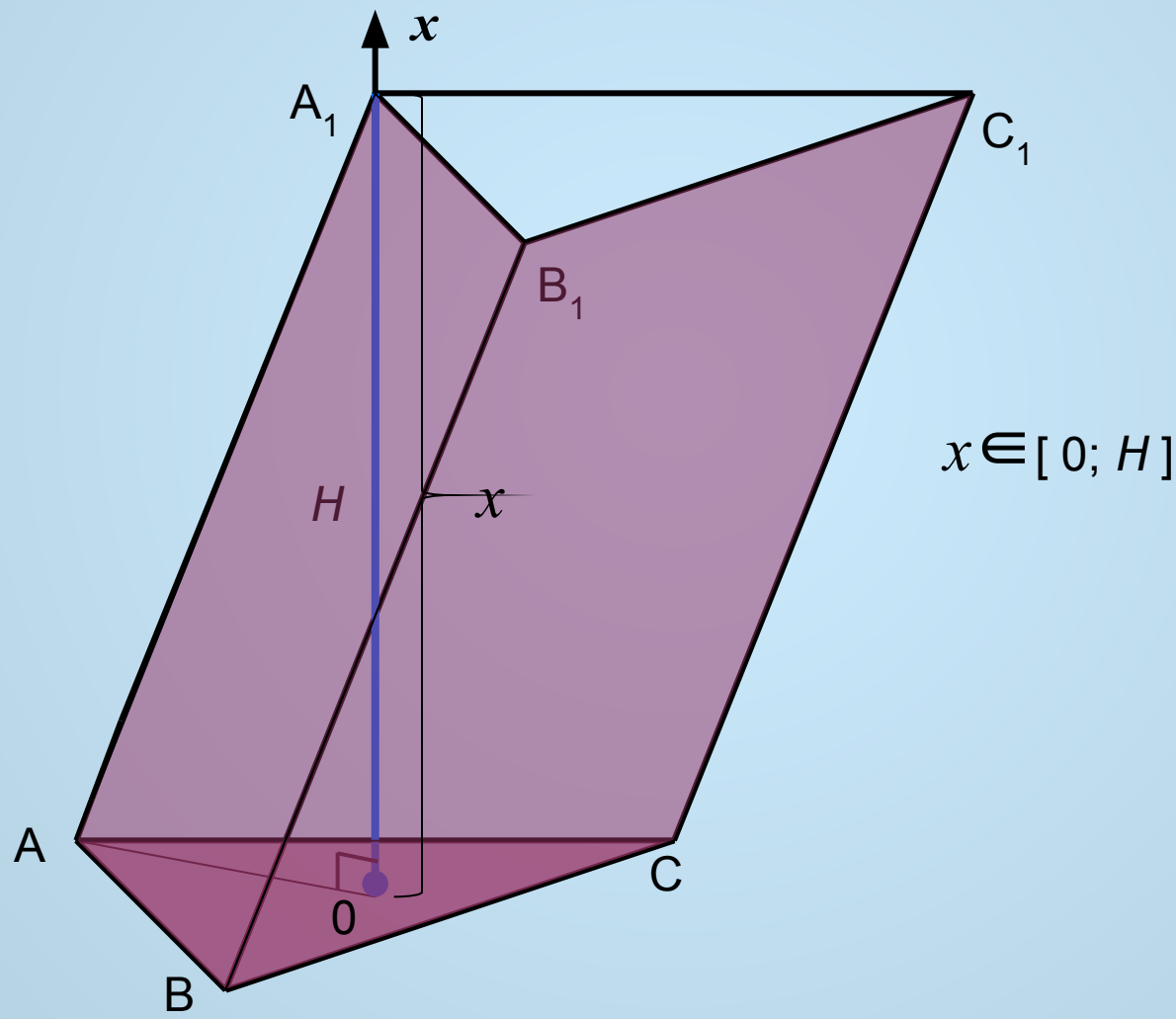


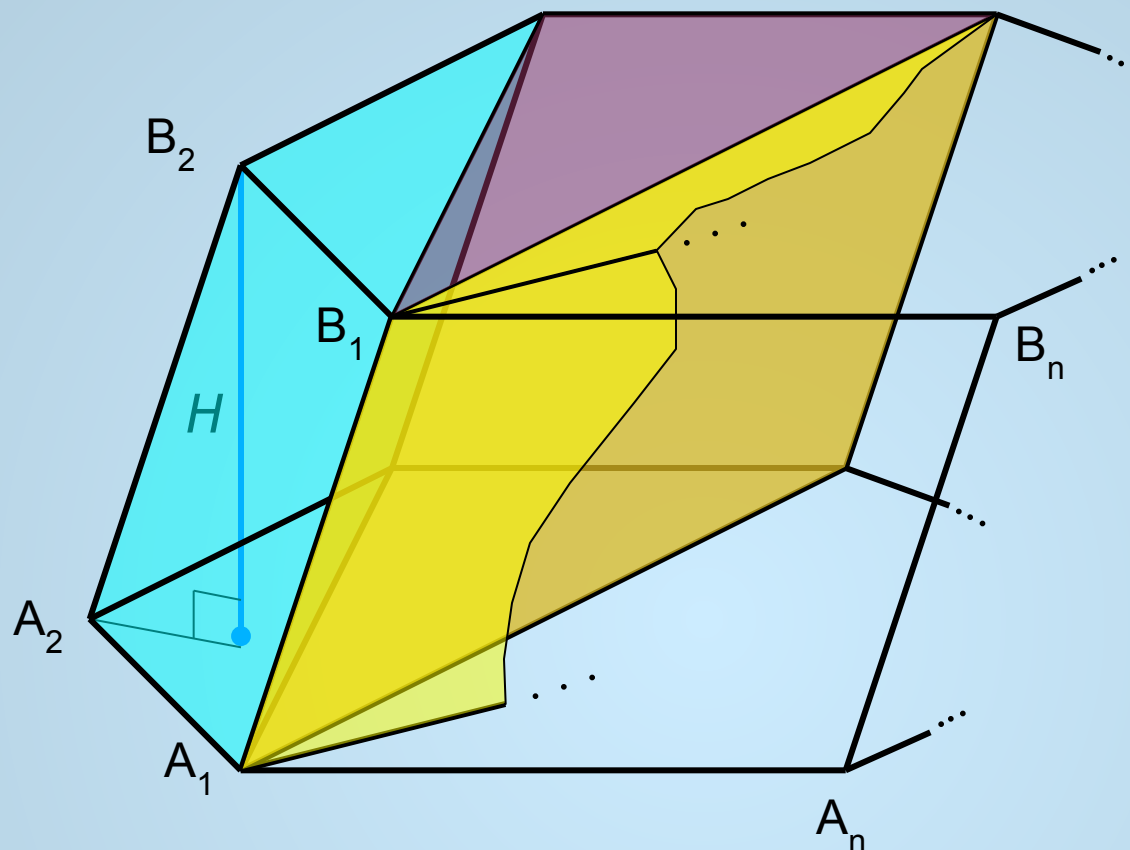
С учетом вспомненных соотношений,
получим:



Если применить метод бесконечных интегральных сумм, то получится:

$$V = \int_0^H S_{\text{сеч.}} dx = S_{\text{сеч.}} \cdot \int_0^H dx = S_{\text{сеч.}} \cdot x \Big|_0^H = S_{\text{сеч.}} \cdot H$$





Рассмотрим произвольную n -угольную призму $A_1 A_2 \dots A_n B_1 B_2 \dots B_n$. Разобьем её на $(n-2)$ треугольные призмы, полученные при проведении диагональных сечений из вершины A_1 . По свойству объема:

$$\begin{aligned}
 V_{A_1 A_2 \dots A_n B_1 B_2 \dots B_n} &= S_{\Delta A_1 A_2 A_3} \cdot H + S_{\Delta A_1 A_3 A_4} \cdot H + \dots + S_{\Delta A_1 A_{n-1} A_n} \cdot H = \\
 &= H \cdot \left(S_{\Delta A_1 A_2 A_3} + S_{\Delta A_1 A_3 A_4} + \dots + S_{\Delta A_1 A_{n-1} A_n} \right) = \boxed{S \cdot H}
 \end{aligned}$$

Итак, для любой n -угольной призмы:

$$V = S_{\text{осн.}} \cdot H$$

или

$$V = S_{\perp \text{сеч.}} \cdot m$$

,где $S_{\text{осн.}}$ – площадь основания призмы, $S_{\perp \text{сеч.}}$ – площадь перпендикулярного сечения, H – высота призмы, m – длина бокового ребра призмы.