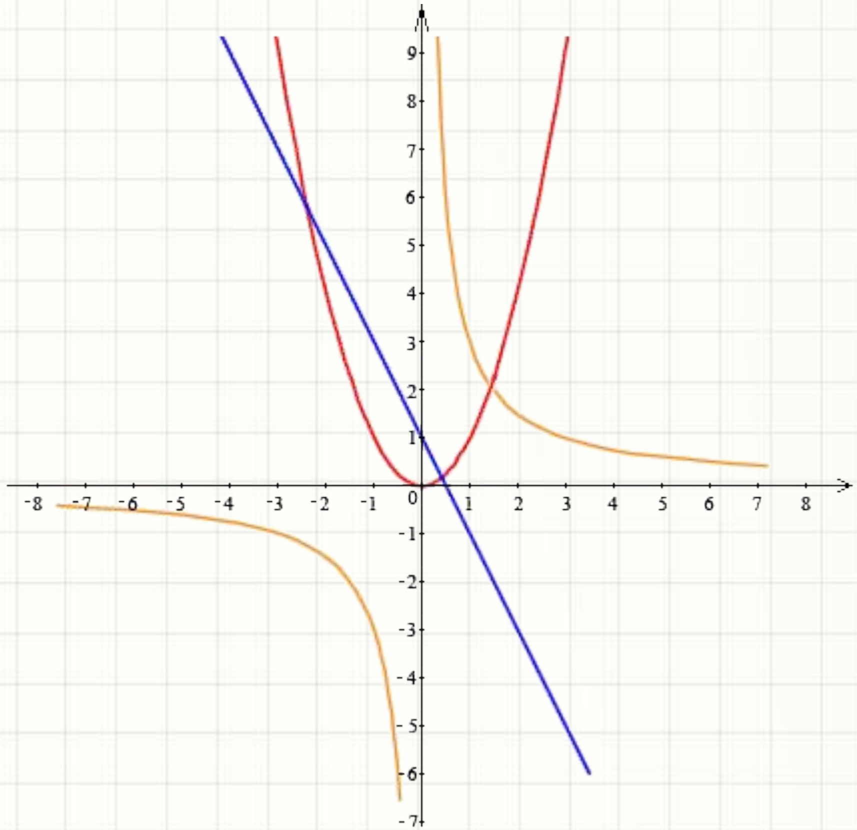
Исследование функций и построение графиков



Кириченко Р.М.

СО-11

Схема исследования функции с целью построения ее графика

1) Область определения, непрерывность, четность/нечётность.

2) Асимптоты графика функции.

3) Возрастание, убывание и экстремумы функции.

4) Выпуклость, вогнутость и перегибы графика.

ЯК ЗНАЙТИ ОБЛАСТЬ ВИЗНАЧЕННЯ ФУНКЦІЇ

п/п	Вид функції	Обмеження ($f(x)$ і $g(x)$ існують!)	Формулювання
1	$y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$	$g(x) \neq 0$	Знаменник дробу не дорівнює нулю
2	$y = \sqrt[2k]{f(x)}$	$f(x) \geq 0$	Під знаком кореня парного степеня може стояти лише невід'ємний вираз
3	$y = \lg(f(x))$	$f(x) > 0$	Під знаком логарифма може стояти лише додатний вираз
4	$y = \log_{f(x)} a \quad (a > 0)$	$\begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) \neq 1 \end{cases}$	В основі логарифма може стояти лише додатний вираз, що не дорівнює одиниці
5	$y = \mathrm{tg}(f(x))$	$f(x) \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$	Під знаком тангенса може стояти лише вираз, що не дорівнює $\dfrac{\pi}{2} + \pi k$ (k — ціле)
6	$y = \mathrm{ctg}(f(x))$	$f(x) \neq \pi k,\ k \in Z$	Під знаком котангенса може стояти лише вираз, що не дорівнює πk (k — ціле)
7	$y = \arcsin(f(x))$	$\lvert f(x) \rvert \leq 1$	Під знаками арксинуса і арккосинуса може стояти лише вираз, модуль якого менше або дорівнює одиниці
8	$y = \arccos(f(x))$		
9	$y = x^{\alpha},\ \alpha \in R$		
	а) α — натуральне	x — будь-яке	
	б) α — ціле від'ємне або нуль	$x \neq 0$	
	в) α — додатне не ціле число	$x \geq 0$	
	г) α — від'ємне не ціле число	$x > 0$	

Непрерывность функции

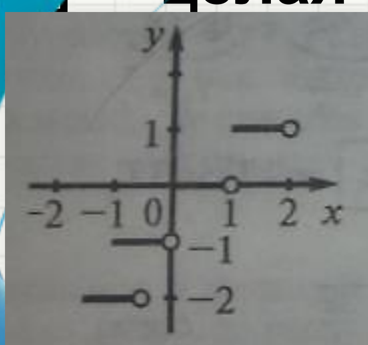
Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке a, если при $x \to a$ $f(x) \to f(a)$, то есть $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

Если функция $f(x)$ непрерывна в каждой точке некоторого промежутка I, то ее называют непрерывной на промежутке I.

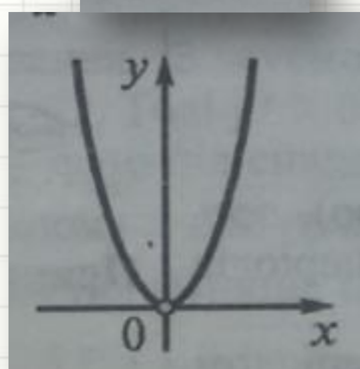
(график функции, непрерывной на промежутке — непрерывная линия на этом промежутке.)

Примеры функций, которые имеют точки разрыва

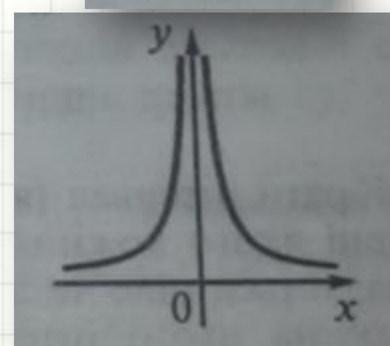
$y = [x]$ — целая часть x $\qquad y = \frac{x^3}{x} \qquad y = \frac{1}{x^2}$



Точки разрыва — все целочисленные точки.



0 — точка разрыва.



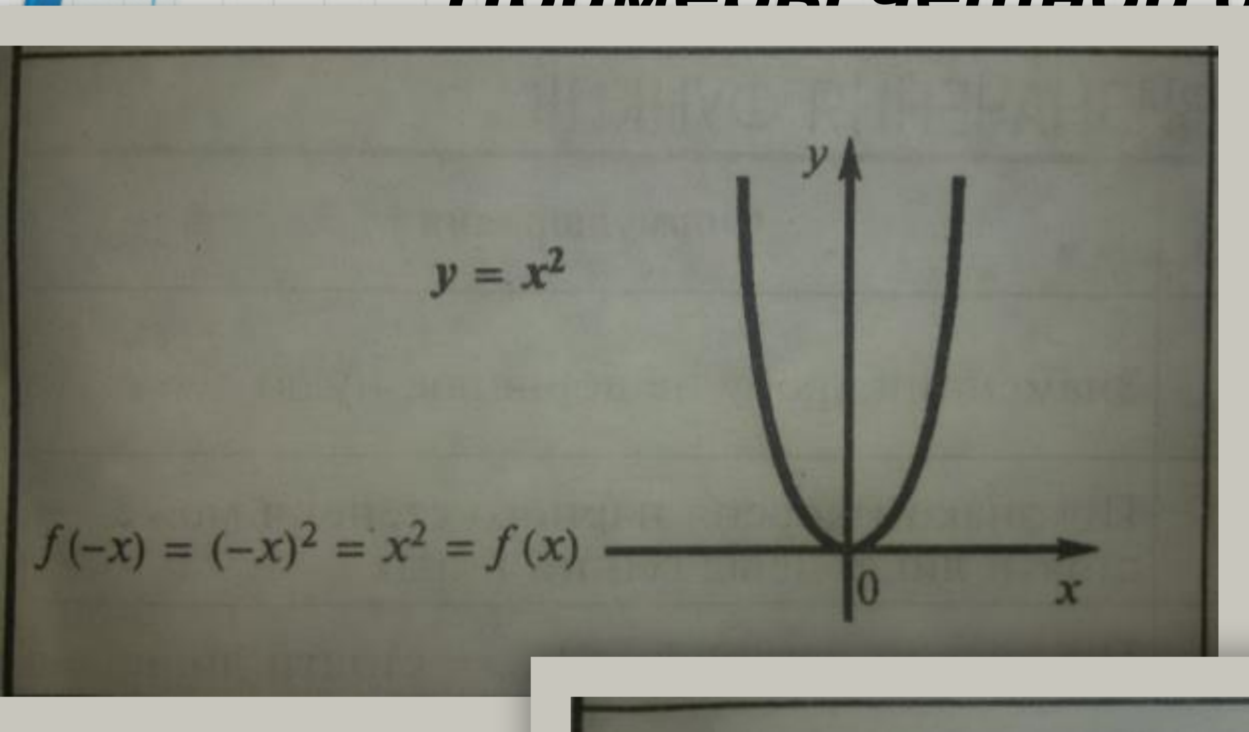
0 — точка разрыва.

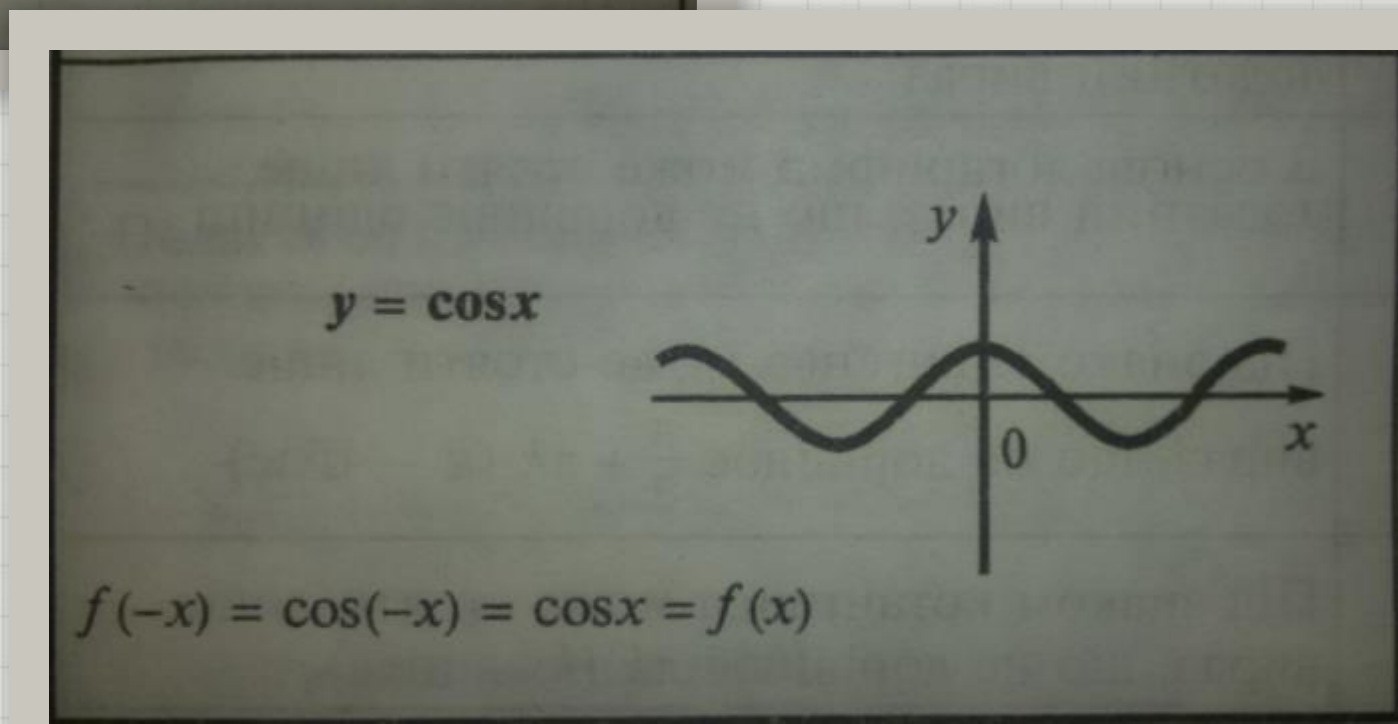
Четные и нечётные функции

Функция f называется парной, если её область определения симметрична относительно началу координат и для любого x из её области определения
$f(-x) = f(x)$
Свойства
График парной функции симметричен относительно оси 0_y

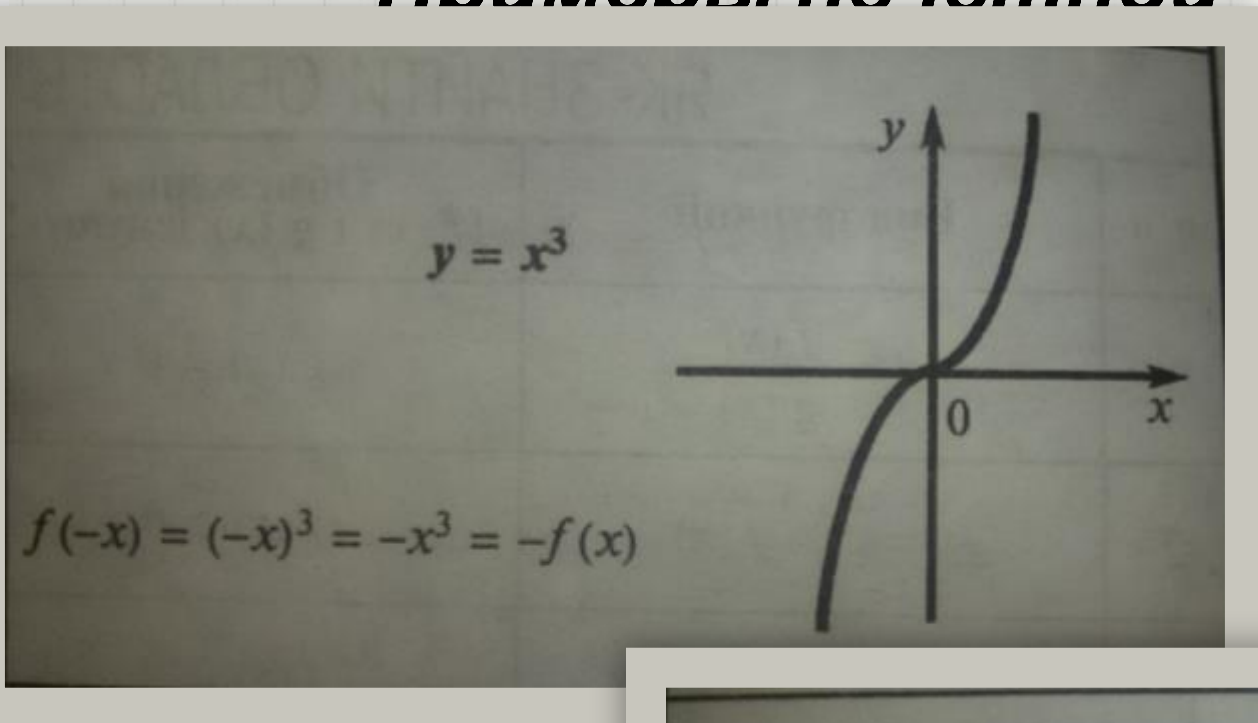
Функция f называется не парной, если её область определения симметрична относительно началу координат и для любого x из её области определения
$f(-x) = -f(x)$
Свойства
График парной функции симметричен относительно началу координат

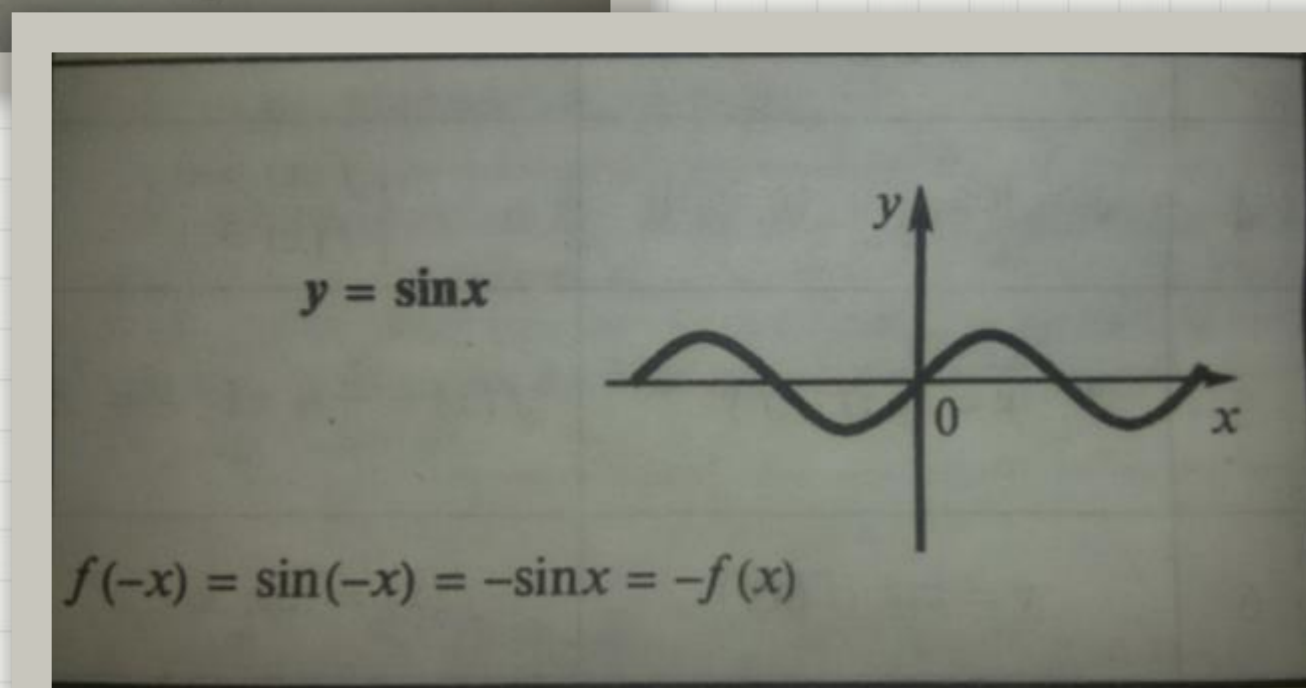
Примеры четной функции



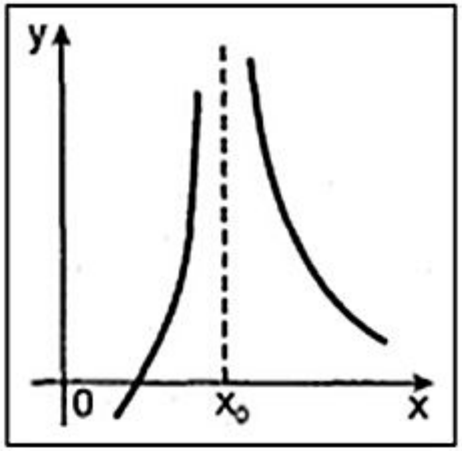
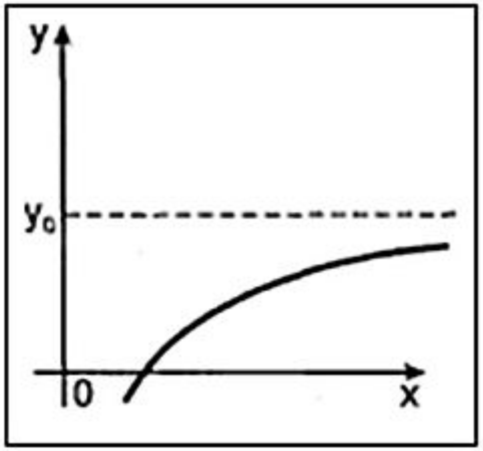
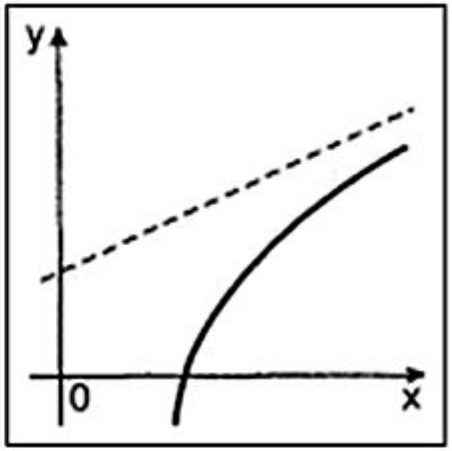


Примеры нечетной



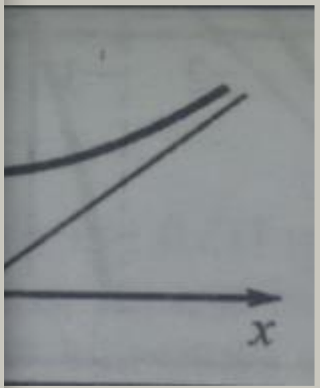


Виды асимптот

Вертикальная $x = x_0$	Горизонтальная $y = y_0$	Наклонная $y = kx + b \ (k \neq 0)$
		
$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$	$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = y_0.$	$k = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x};$ $b = \lim\limits_{x \to \infty} [f(x) - kx].$

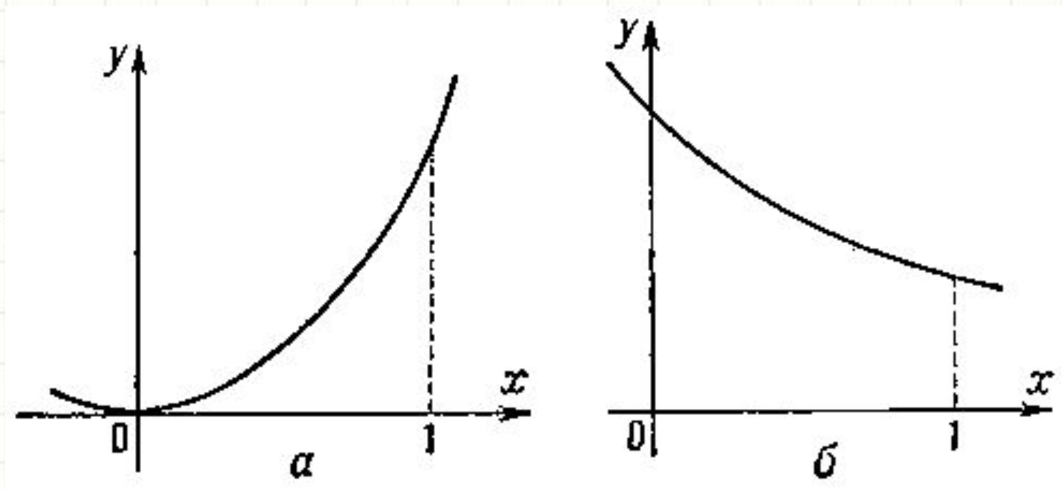
Если $f(x)$ можно представить в виде $f(x) = kx + b + \alpha(x)$, где $\alpha(x) \to 0$, когда $x \to \infty$, то прямая $y = kx + b$ является асимптотой: при $k = 0$ — горизонтальной, а при $k \neq 0$ — наклонной.

График функции может иметь вертикальные асимптоты в точках разрыва (бесконечного) или на границах области определения функции.



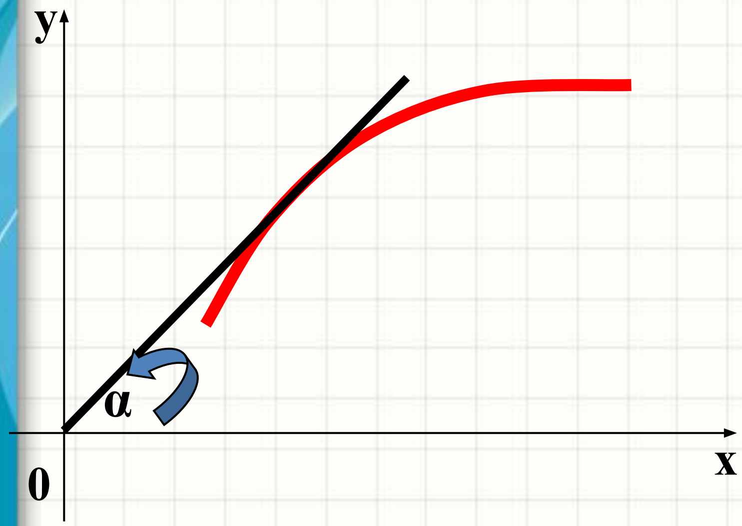
ке
[a, b],
если для любой пары точек x и x', $a \leq x < x' \leq b$ выполняется неравенство $f(x) \leq f(x')$, и строго возрастающей— если выполняется неравенство $f(x) < f(x')$. Аналогично определяется убывание

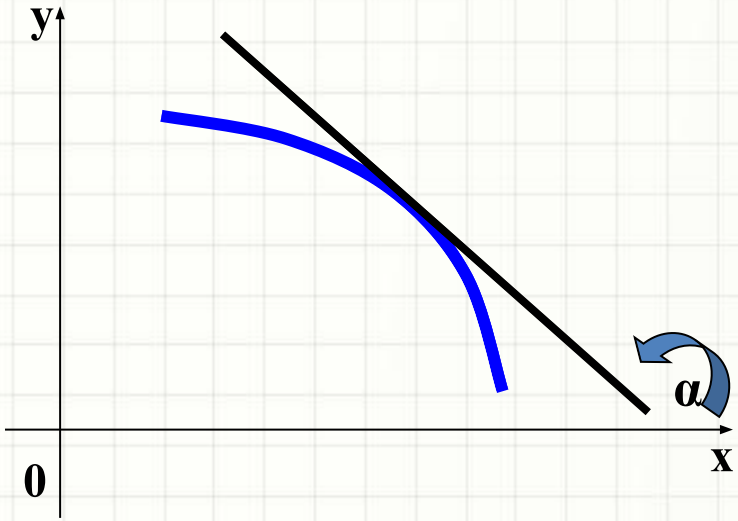
Например функция y = x2 (рис., а) строго возрастает на отрезке [0, $y = \frac{1}{x+1}$
(рис., б) строго убывает на этом отрезке.



Теорема. **Если функция f имеет неотрицательную производную в каждой точке интервала $(a;b)$, то функция f возрастает на интервале $(a;b)$.**

Теорема. **Если функция имеет неположительную производную в каждой точке интервала $(a;b)$, то функция f убывает на интервале $(a;b)$.**





Функция возрастает

$\alpha < 90^0$

$tg\,\alpha > 0$

$f\,`(x) > 0$

Функция убывает

$\alpha > 90^0$

$tg\,\alpha < 0$

$f\,`(x) < 0$

Исследование экстремумов функции

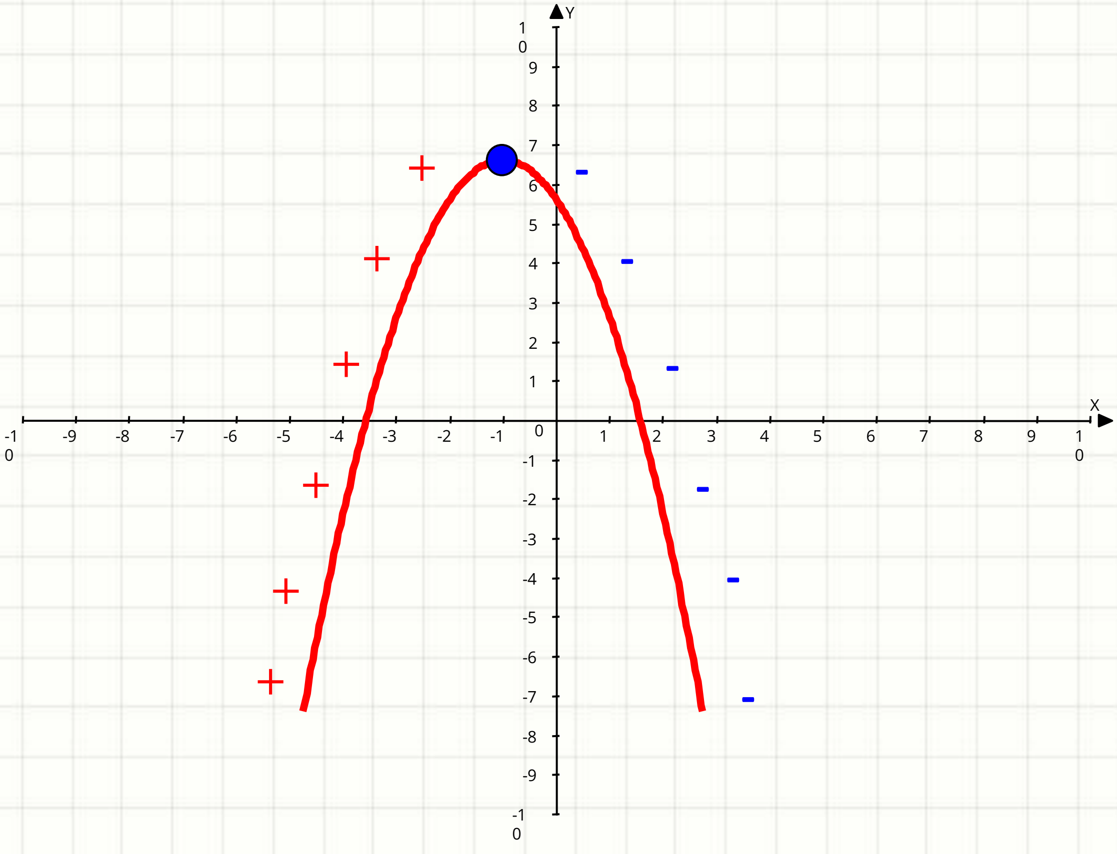
Необходимое условие экстремума. (теорема Ферма)

Если точка x_0 является точкой экстремума функции f и в этой точке существует производная f`(x), то она равна нулю:

$$f`(x) = 0.$$

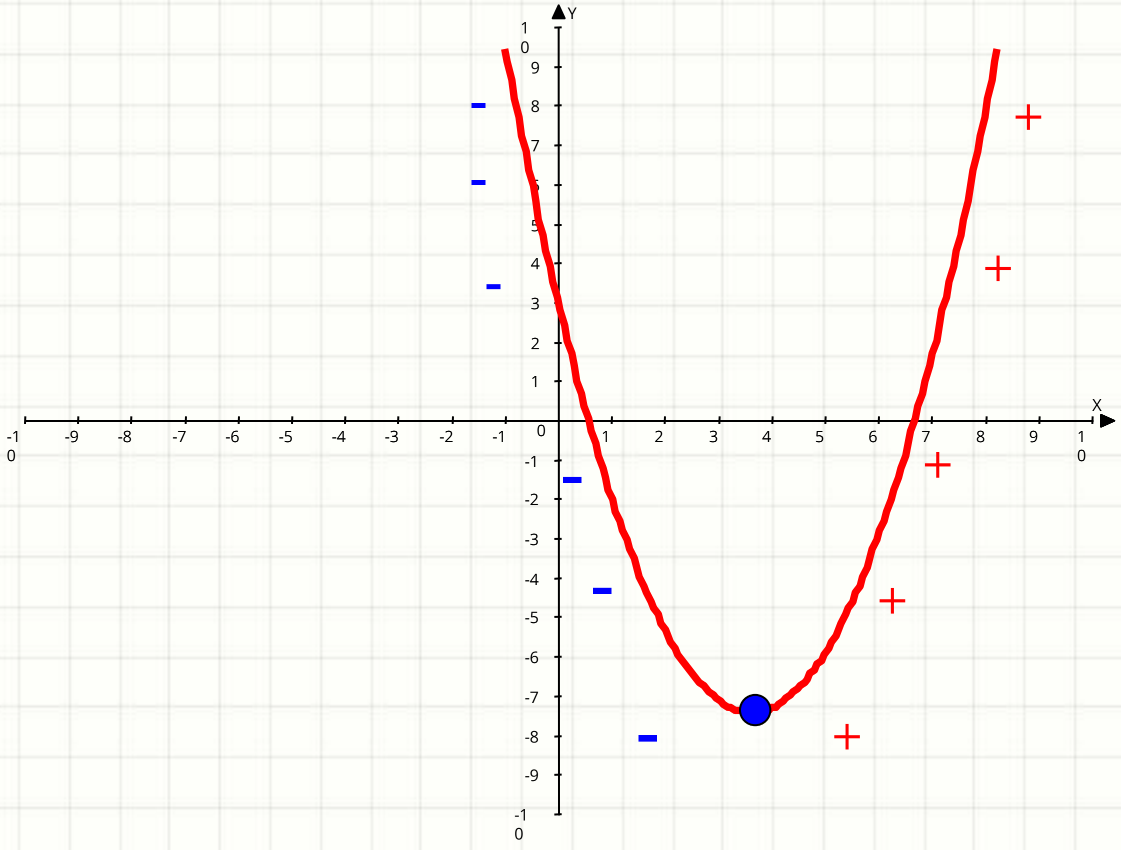
Достаточные условия существования экстремума в точке

- Признак максимума функции. **Если функция *f* непрерывна в точке x_0, а $f'(x) > 0$ на интервале $(a; x_0)$, и $f'(x) < 0$ на интервале $(x_0; b)$, то точка x_0 является точкой максимума функции *f*.**



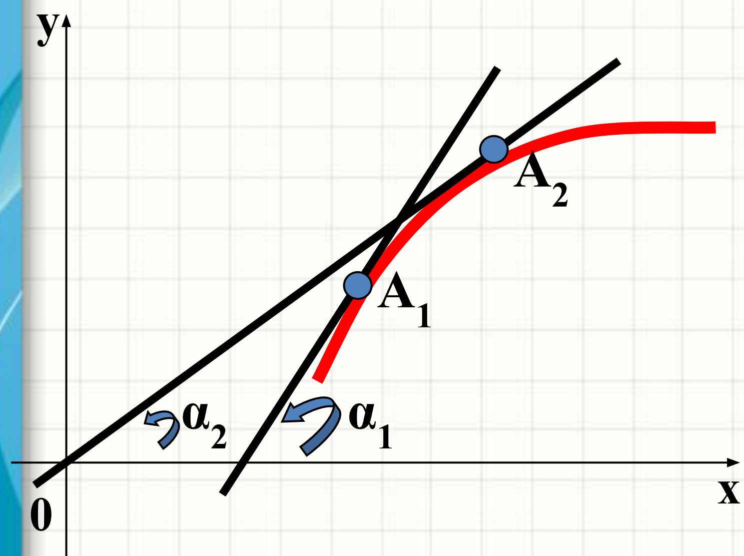
Достаточные условия существования экстремума в точке

- Признак минимума функции. **Если функция *f* непрерывна в точке x_0, $f`(x) < 0$ на интервале $(a; x_0)$ и $f`(x) > 0$ на интервале $(x_0; b)$, то точка x_0 является точкой минимума функции *f***



Достаточные условия выпуклости и вогнутости графика функции

Т е о р е м а. Пусть функция $f(x)$, $x \in (a;b)$, имеет первую и вторую производные. Тогда, если $f``(x) < 0$ для всех $x \in (a;b)$, то на интервале $(a;b)$ график функции $f(x)$ выпуклый вверх, если же $f``(x) > 0$ для всех $x \in (a;b)$, то график функции $f(x)$ выпуклый вниз на $(a;b)$.



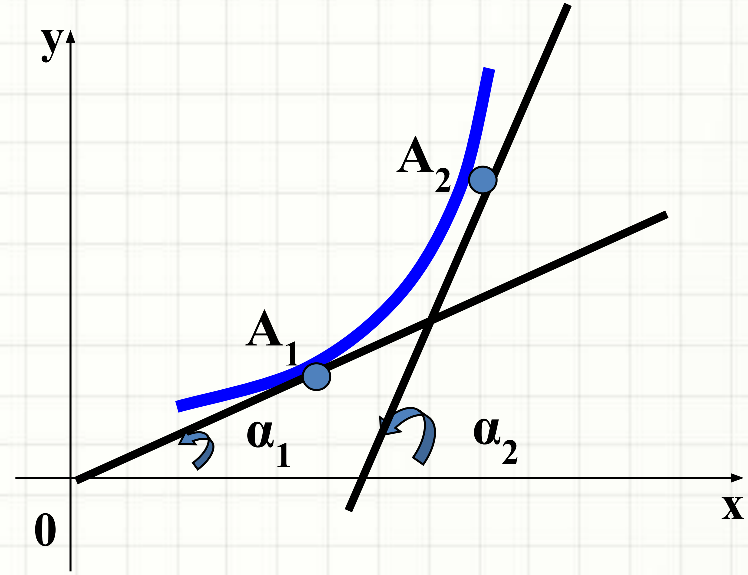


График выпуклый

α - убывает

tg α - убывает

f `(x) – убывает

$f``(x) < 0$

График вогнутый

α - возрастает

tg α - возрастает

f `(x) – возрастает

$f``(x) > 0$

Точки перегиба

1) **Найти критические точки функции по второй производной.**
2) **Исследовать знак второй производной в некоторой окрестности критический точки.**

Если $f``(x)$ меняет свой знак при переходе аргумента через критическую точку x_0, то $(x_0; f(x_0))$ - точка перегиба графика данной функции