

Решение простейших тригонометрических уравнений.

Алгебра и начала анализа, 10 класс.

Под простейшими тригонометрическими уравнениями понимают уравнения вида:

$$\sin x = a$$

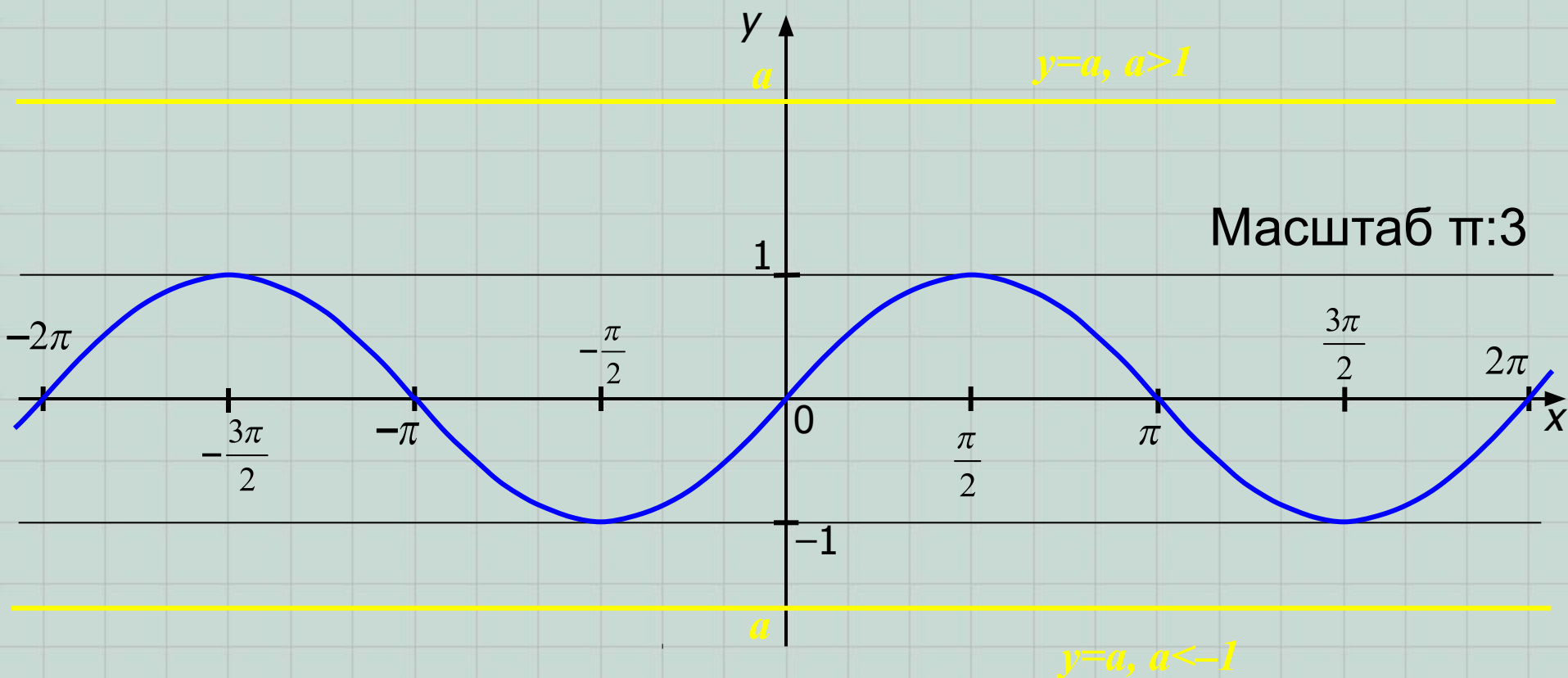
$$\cos x = a$$

,где x –
выражение с
переменной,
 $a \in [-1; 1]$.

$$\operatorname{tg} x = a$$

$$\operatorname{ctg} x = a$$

Рассмотрим решение уравнения $\sin x = a$ с помощью графического способа решения. Для этого нам надо найти абсциссы точек пересечения синусоиды $y = \sin x$ и прямой $y = a$. Сразу же изобразим синусоиду.



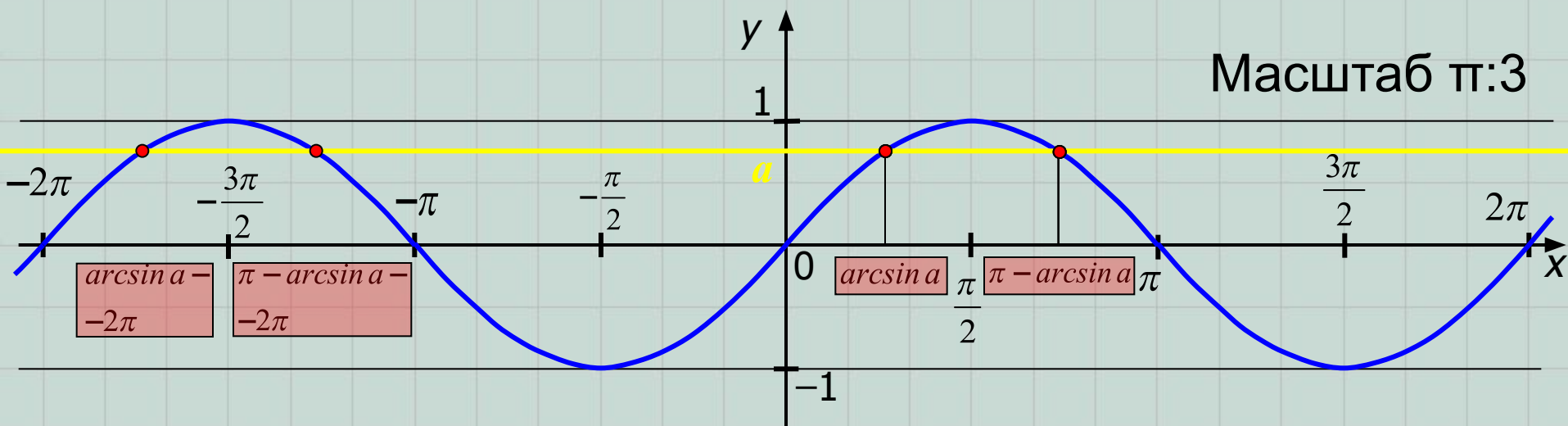
I случай: $a \notin [-1; 1]$

Очевидно, что в этом случае точек пересечения нет и поэтому уравнение корней не имеет!

II случай: $a \in [-1; 1]$

Очевидно, что в этом случае точек пересечения бесконечно много, причем их абсиссы определяются следующим образом:

- 1) Рассмотрим точку, абсцисса которой попадает на отрезок $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.
- 2) Абсцисса этой точки – есть число (угол в радианной мере), синус которого равен a , т.е. значение этого числа равно $\arcsin a$.



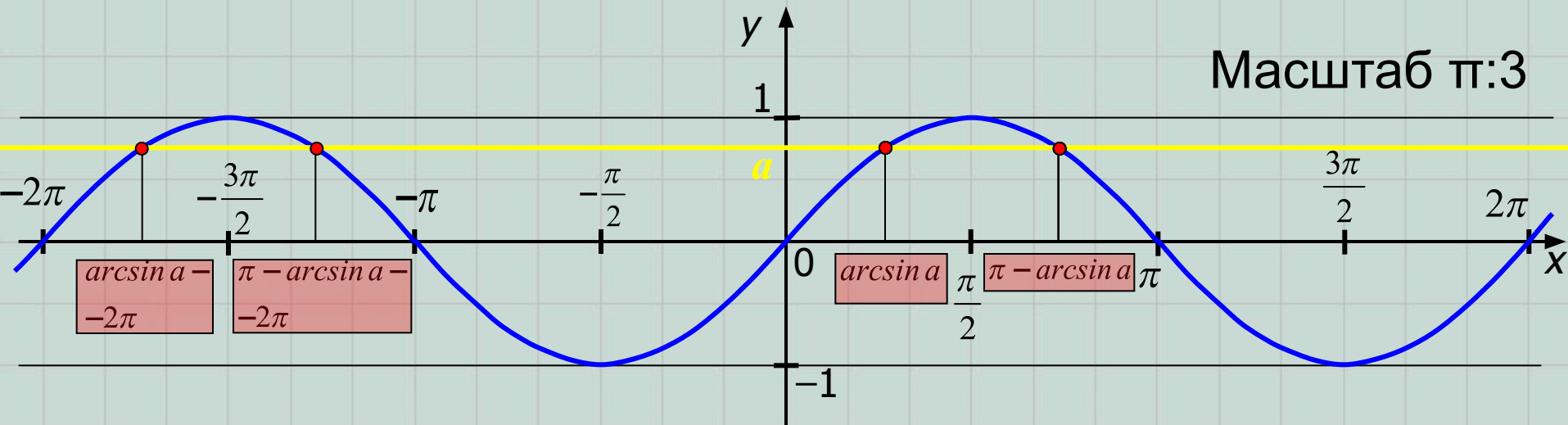
- 3) Абсцисса второй точки, попадающей на отрезок $[-\pi; \pi]$, равна $(\pi - \arcsin a)$. Для объяснения этого достаточно вспомнить, что $\sin x = \sin(\pi - x)$.

- 4) Все остальные абсциссы точек пересечения получаются из этих двух добавлением к ним чисел вида $2\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$ (ведь мы помним свойство периодичности функции $y = \sin x$). Задание: назовите, какие абсциссы «улетевших» за край чертежа двух точек?

Ответ: $(\arcsin a + 2\pi)$ и $(3\pi - \arcsin a)$.

Таким образом, все корни в этом случае можно записать в виде совокупности:

$$x = \begin{cases} \arcsin a + \pi \cdot 2n, n \in \mathbf{Z}; \\ -\arcsin a + \pi \cdot (2k + 1), k \in \mathbf{Z}/ \end{cases}$$

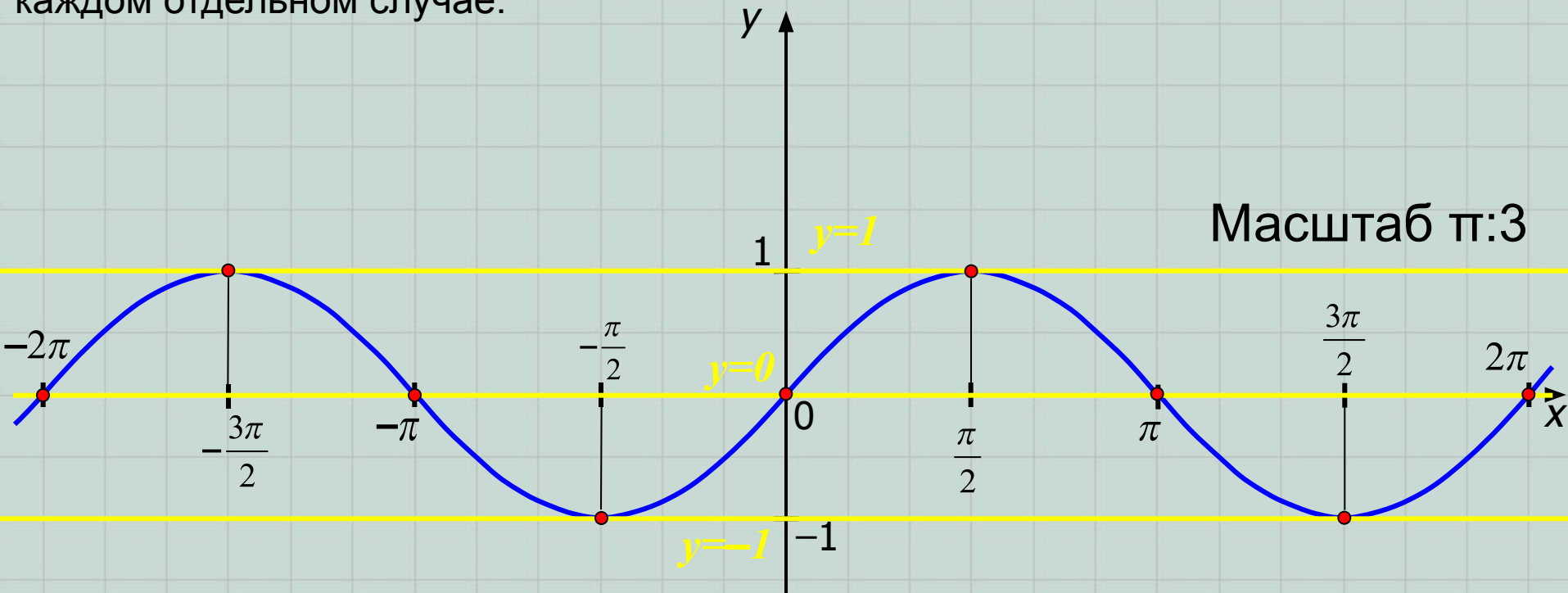


Или, принято эти две записи объединять в одну (подумайте, как это обосновать):

$$x = (-1)^m \cdot \arcsin a + \pi m, m \in \mathbf{Z}.$$

III случай: $a = -1; 0$ или 1 .

Эти три значения – особые! Для них общая формула корней, выведенная нами в предыдущем случае не годится. Проследите самостоятельно за выводом в каждом отдельном случае.



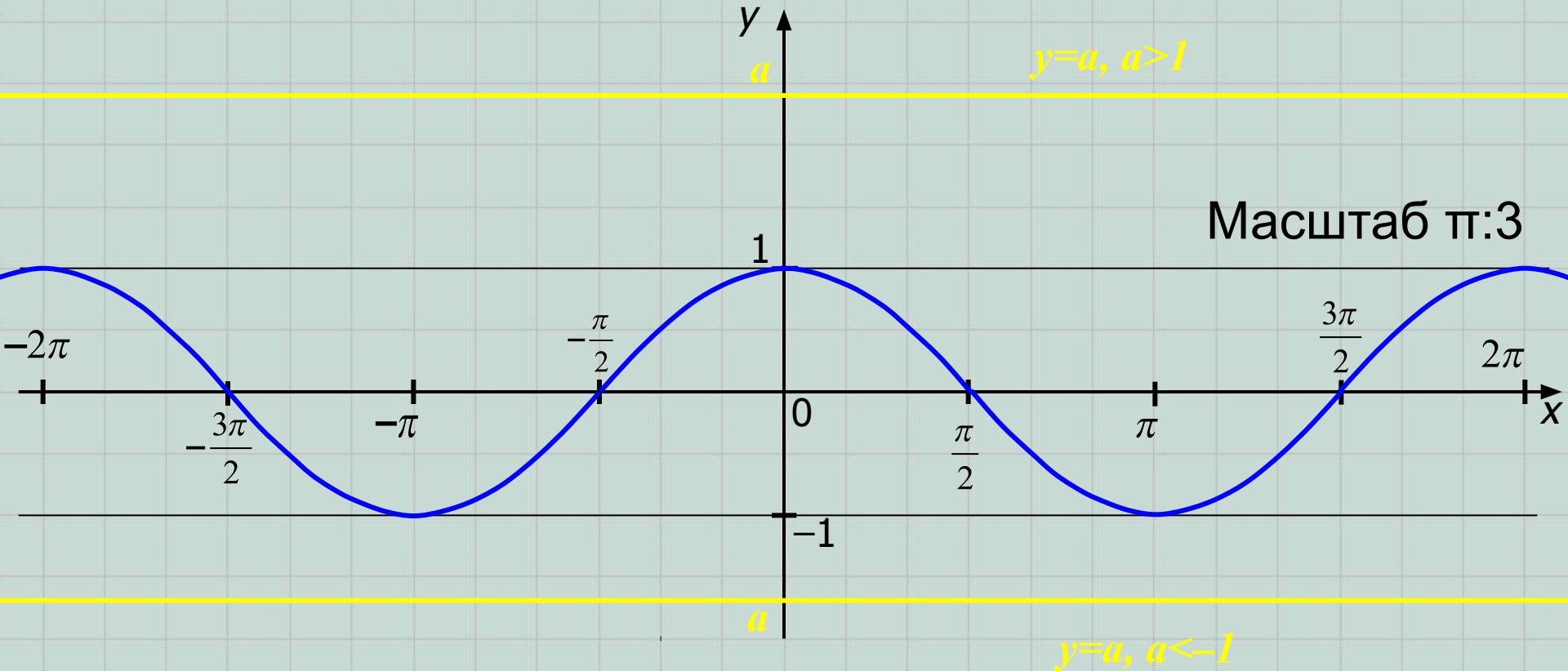
$$\sin x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

$$\sin x = 0 \Rightarrow x = \pi t, \quad t \in \mathbf{Z}.$$

$$\sin x = -1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi r, \quad r \in \mathbf{Z}.$$

Запомните эти
три особых
случая!

Решение уравнения $\cos x = a$ рассмотрим тем же графическим способом. Для этого нам надо найти абсциссы точек пересечения косинусоиды $y = \cos x$ и прямой $y = a$. Сразу же изобразим косинусоиду.



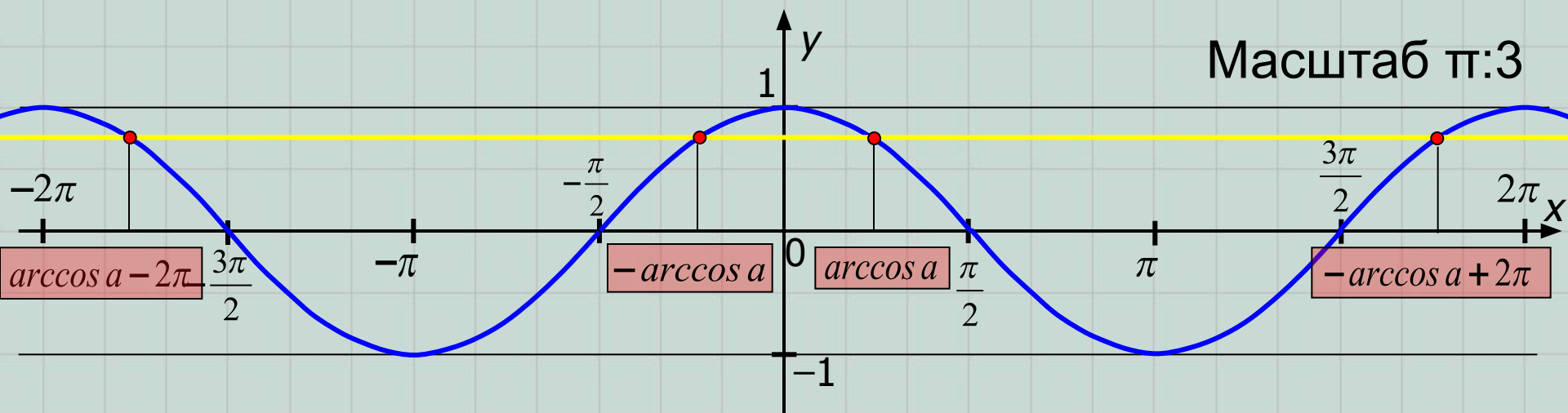
I случай: $a \notin [-1; 1]$

Очевидно, что в этом случае точек пересечения нет и поэтому уравнение корней не имеет!

II случай: $a \in [-1; 1]$

Очевидно, что в этом случае точек пересечения бесконечно много, причем их абсциссы определяются следующим образом:

- 1) Рассмотрим точку, абсцисса которой попадает на отрезок $[0; \pi]$.
- 2) Абсцисса этой точки – есть число (угол в радианной мере), косинус которого равен a , т.е. значение этого числа равно $\arccos a$.

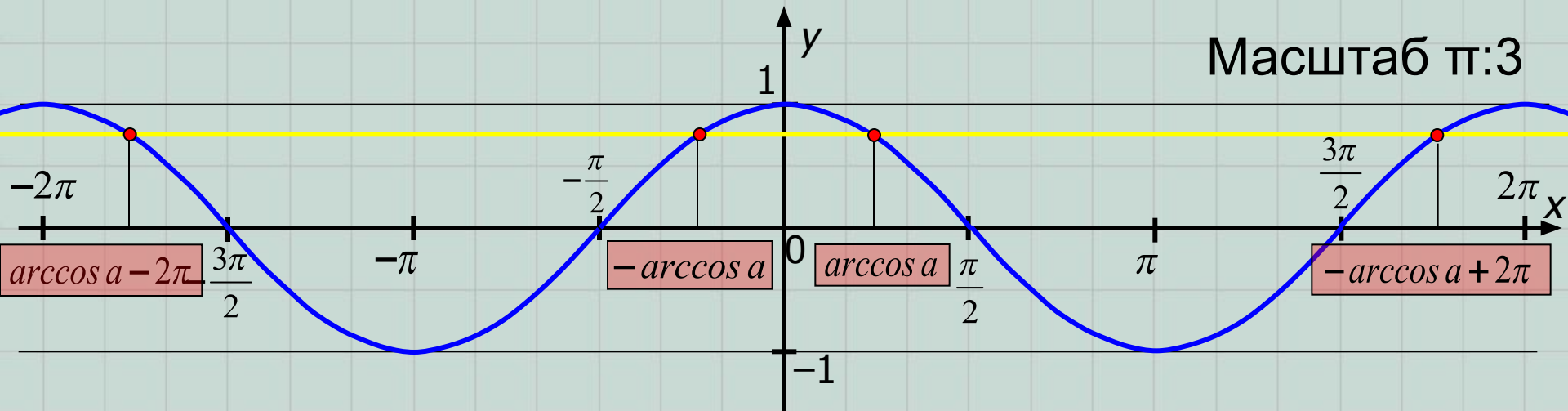


- 3) Абсцисса второй точки, попадающей на отрезок $[-\pi; 0]$, равна $-\arccos a$. Для объяснения этого достаточно вспомнить, что $\cos x = \cos(-x)$.

- 4) Все остальные абсциссы точек пересечения получаются из этих двух добавлением к ним чисел вида $2\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

Таким образом, все корни в этом случае можно записать в виде совокупности:

$$x = \begin{cases} \arccos a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; \\ -\arccos a + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}/ \end{cases}$$

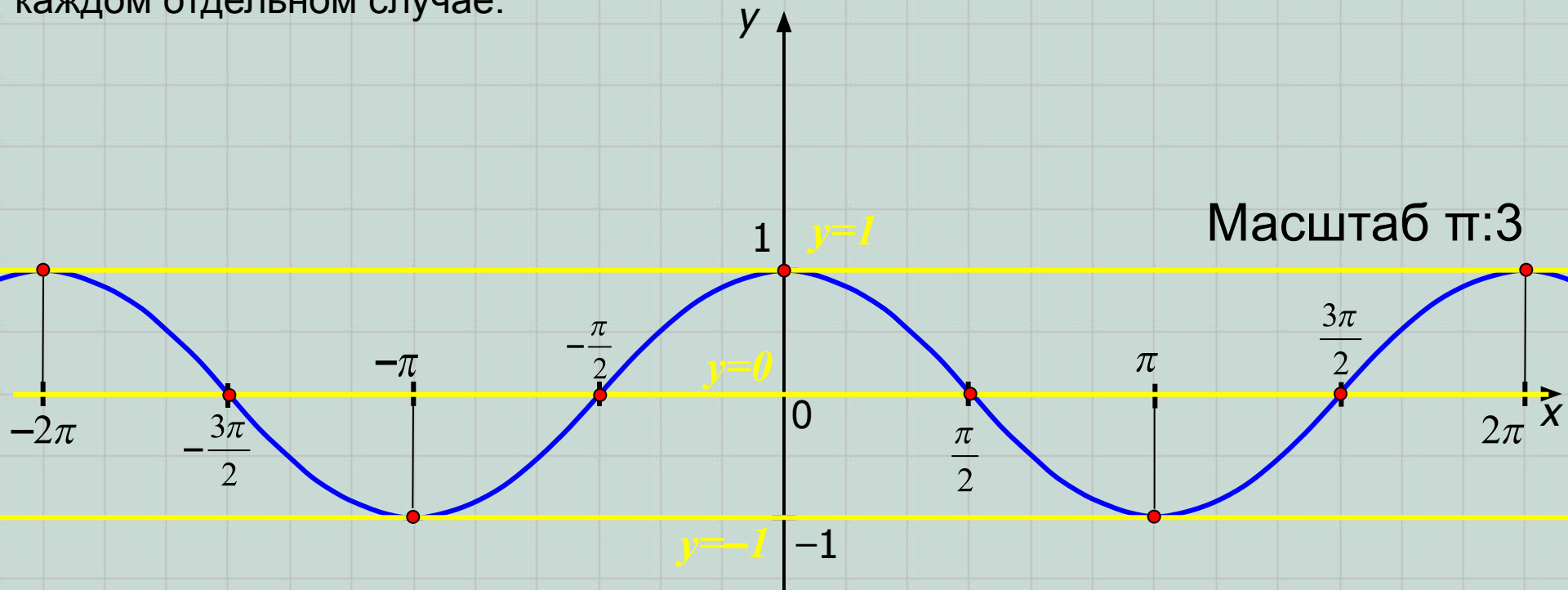


Или, принято эти две записи объединять в одну:

$$x = \pm \arccos a + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}/$$

III случай: $a = -1; 0$ или 1 .

Эти три значения – особые! Для них общая формула корней, выведенная нами в предыдущем случае не годится. Проследите самостоятельно за выводом в каждом отдельном случае.



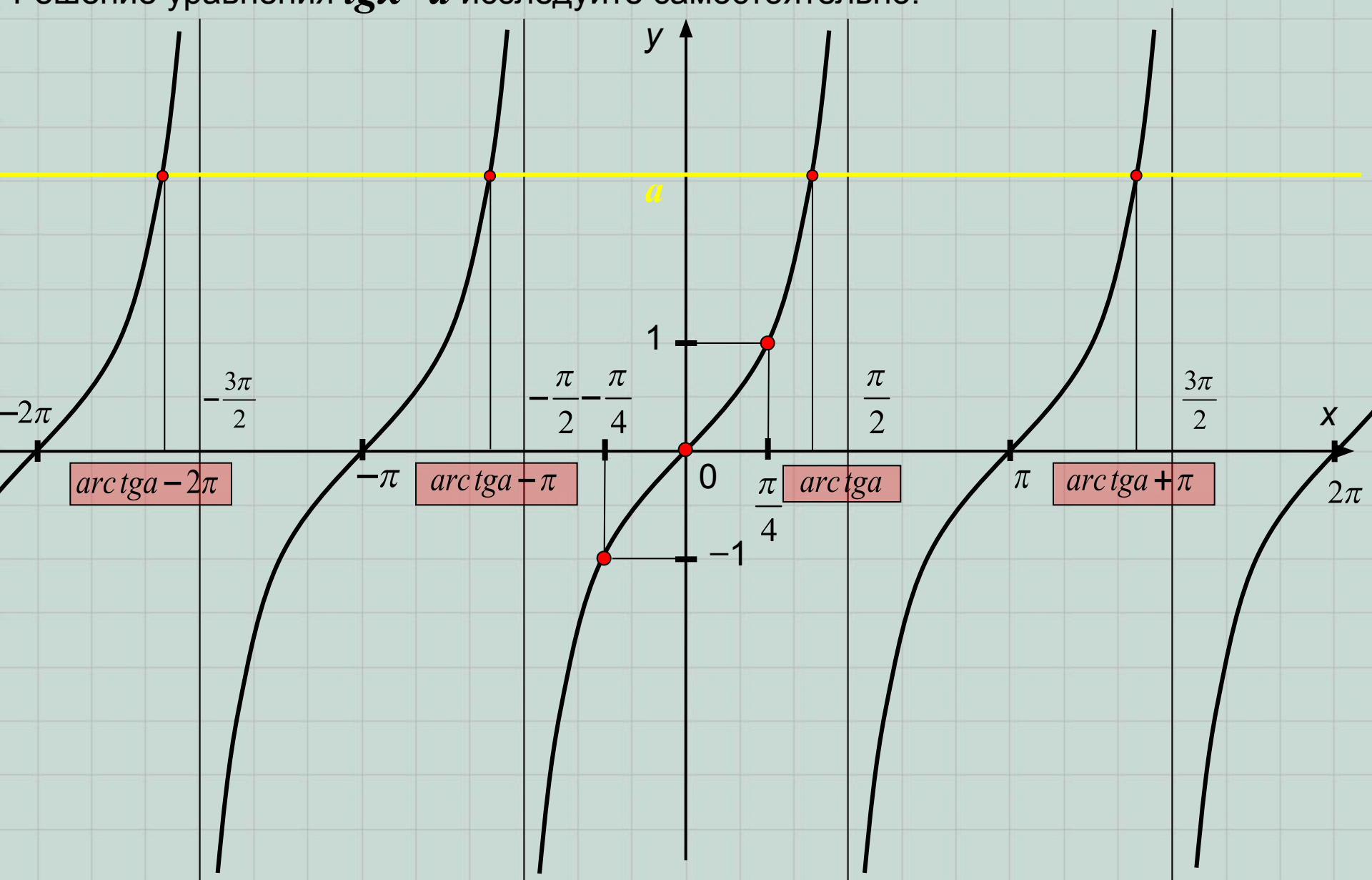
$$\cos x = 1 \Rightarrow x = 2\pi n, n \in \mathbf{Z}.$$

$$\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi t, t \in \mathbf{Z}.$$

$$\cos x = -1 \Rightarrow x = \pi + 2\pi r, r \in \mathbf{Z}.$$

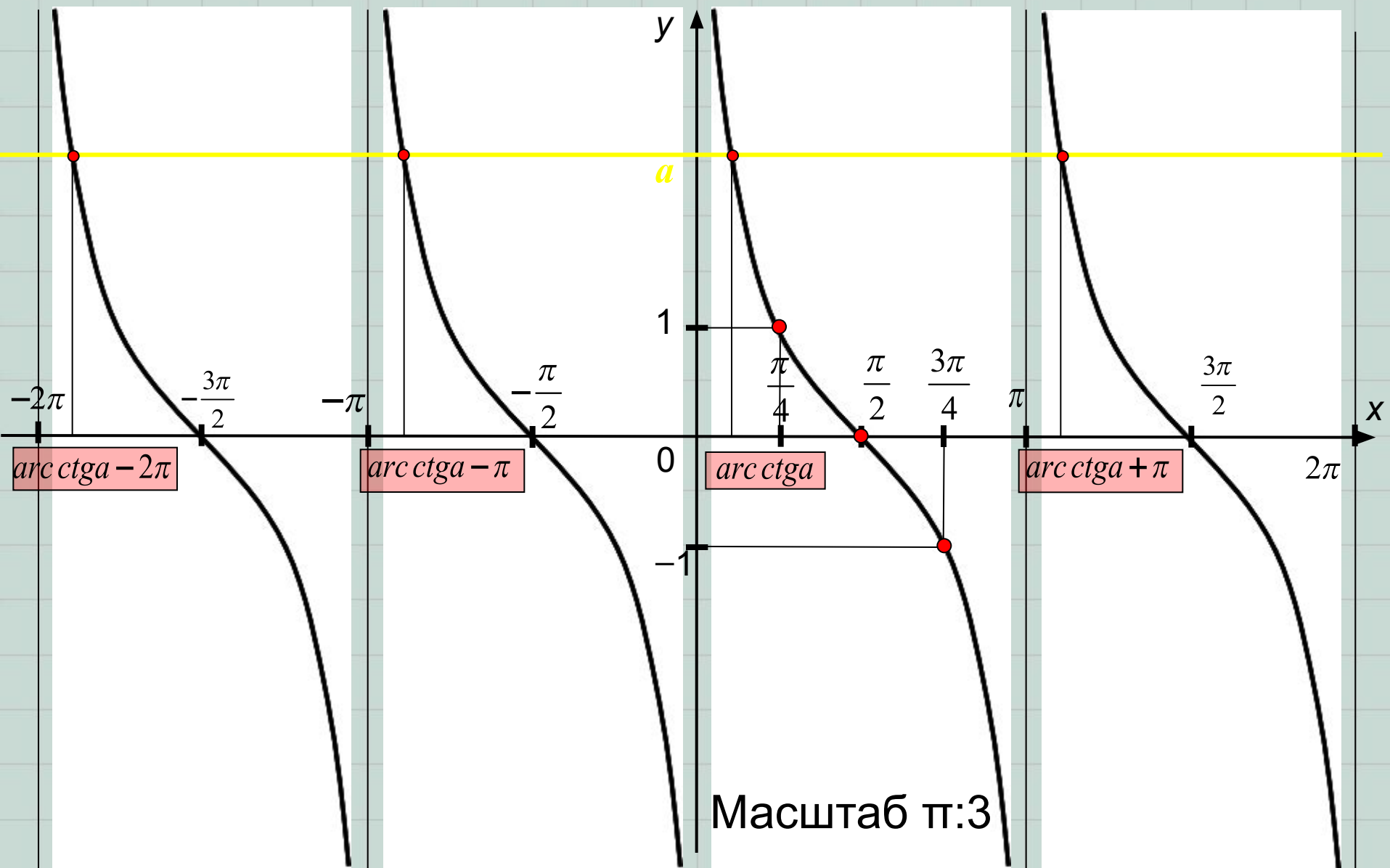
Запомните эти
три особых
случая!

Решение уравнения $\operatorname{tg} x = a$ исследуйте самостоятельно:



$$x = \operatorname{arctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}!$$

Решение уравнения $\text{ctgx}=a$ исследуйте самостоятельно:



$$x = \text{arc ctga} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Решение любых тригонометрических уравнений сводится к решению рассмотренных выше простейших тригонометрических уравнений. Для этого применяются тождественные преобразования, изученные Вами ранее: различные тригонометрические формулы, различные способы решения алгебраических уравнений, формулы сокращенного умножения и т.д..

Итак, запомним:

$$\sin x = a \Rightarrow x = (-1)^k \arcsin a + \pi k, k \in Z \quad a \in [-1; 1],$$

$$\cos x = a \Rightarrow x = \pm \arccos a + 2\pi n, n \in Z \quad -1 \leq a \leq 1$$

$$\operatorname{tg} x = a \Rightarrow x = \operatorname{arctg} a + \pi p, p \in Z \quad a \in R$$

$$\operatorname{ctg} x = a \Rightarrow x = \operatorname{arcctg} a + \pi l, l \in Z$$