

*Особые приёмы решения
логарифмических
неравенств с переменной
в основании*

Занятие №3

*Методическая разработка
учителя Поляковой Е. А.*

Решение простейших логарифмических неравенств:

$$\log_a x_1 > \log_a x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1 \\ x_1 > x_2 > 0 \\ 0 < a < 1 \\ x_2 > x_1 > 0 \end{cases}$$

$$\log_a x_1 < \log_a x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1 \\ x_2 > x_1 > 0 \\ 0 < a < 1 \\ x_1 > x_2 > 0 \end{cases}$$

*Свойство знаков
двух выражений:*

выражения

$\log_a b$ и $(b - 1)(a - 1)$

имеют один знак

Решение логарифмических неравенств с применением доказанного свойства

Неравенство $\log_{h(x)} f(x) > \log_{h(x)} g(x)$ равносильно
неравенству $(f - g)(h - 1) > 0$ на ОДЗ

Аналогично неравенство $\log_{h(x)} f(x) < \log_{h(x)} g(x)$
равносильно неравенству $(f - g)(h - 1) < 0$ на ОДЗ

Алгоритм решения неравенства $\log_{h(x)} f(x) > \log_{h(x)} g(x)$

1) Находим область допустимых значений переменной (ОДЗ):

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ h(x) > 0, \\ h(x) \neq 1. \end{cases}$$

(Условимся далее две последние строки системы писать одной так: $0 < h(x) \neq 0$)

2) Решаем неравенство $(f(x) - g(x))(h(x) - 1) > 0$.

3) Для найденного решения учитываем ОДЗ.

4) Записываем ответ.

Решите неравенство:

$$\log_{3-x} \frac{1}{|x|} > 1$$

1) ОДЗ:

$$\begin{cases} \frac{1}{|x|} > 0 \\ 0 < 3-x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| > 0 \\ -3 < -x \neq 1-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0, & x > 0 \\ 2 < x \neq 3, \end{cases} \text{ т. е.}$$

$$x \in (-\infty; 0) \setminus (0; 2) \setminus (2; 3)$$

2)

$$\log_{3-x} \frac{1}{|x|} > 1 \Leftrightarrow \log_{3-x} \frac{1}{|x|} > \log_{3-x} (3-x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{|x|} - (3-x) \right) (3-x-1) > 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{|x|} - 3+x \right) (-2) < 0$$

a)

$$\begin{cases} x > 0 \\ \left(\frac{1}{x} - 3+x \right) (-2) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \frac{1-3x+x^2}{x} (x-2) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \frac{(x^2 - 3x + 1)(-2)}{x} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \frac{\left(x - \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \approx 2,24\right) \left(x - \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \approx 2,24\right) (x - 2)}{x} < 0 \end{cases}$$

С учётом ОДЗ – все x из

$$\left(0; \frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(2; \frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right)$$

б) $\begin{cases} x < 0 \\ \left(\frac{1}{-x} - 3 + x\right)(-2) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ \frac{1 + 3x - x^2}{-x}(x - 2) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ \frac{(x^2 - 3x - 1)(-2)}{x} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ \frac{\left(x - \frac{3 - \sqrt{13}}{2} \approx 3,6\right) \left(x - \frac{3 + \sqrt{13}}{2} \approx 3,6\right) (x - 2)}{x} < 0 \end{cases}$$

С учётом ОДЗ – все x из

$$\left(\frac{3 - \sqrt{13}}{2}; 0\right)$$

Решите неравенство: $\frac{\log_{2x}(5x-1)\log_{3x}(7x-1)}{2^{15x^2+2} - 2^{11x}} \geq 0$

Ответ: $\left(\frac{1}{5}; \frac{2}{7}\right] \boxtimes \left(\frac{1}{2}; +\infty\right).$

В решении этого неравенства используем то, что

1) знак $\log_{2x}(5x-1)$ совпадает со знаком $(5x-1-1)(2x-1)$

2) знак $\log_{3x}(7x-1)$ совпадает со знаком $(7x-1-1)(3x-1)$

Интересно, а может знак выражения

$$2^{15x^2+2} - 2^{11x}$$

совпадает со знаком выражения

$$(2-1)(15x^2+2-11x) ???$$

**Выражения $a^b - a^c$ и $(a - 1)(b - c)$ ($a > 0, a \neq 1$)
имеют один знак**

Докажем, например, что $a^b - a^c > 0$ и $(a - 1)(b - c) > 0$

Доказательство. 1) $a > 1; a - 1 > 0$. $a^b - a^c > 0; a^b > a^c$;
показательная функция с основанием $a > 1$ – возрастает, тогда
 $b > c; b - c > 0$; получили: $\begin{cases} a - 1 > 0 \\ b - c > 0 \end{cases} \Rightarrow (a - 1)(b - c) > 0$

2) a – положительно, но $a < 1; a - 1 < 0$. $a^b - a^c > 0; a^b > a^c$;
показательная функция с основанием $0 < a < 1$ – убывает, тогда

$b < c; b - c < 0$; получили:
 $\begin{cases} a - 1 < 0 \\ b - c < 0 \end{cases} \Rightarrow (a - 1)(b - c) > 0$

Доказано, что

*Заключение о знаках
двух выражений:*

выражения

$$a^b - a^c \text{ и } (a - 1)(b - c)$$

$$(a > 0, a \neq 1)$$

имеют один знак

Решите неравенство: $\frac{\log_{2x}(5x-1)\log_{3x}(7x-1)}{2^{15x^2+2}-2^{11x}} \geq 0$

1) знак $\log_{2x}(5x-1)$ совпадает со знаком $(5x-1-1)(2x-1)$

2) знак $\log_{3x}(7x-1)$ совпадает со знаком $(7x-1-1)(3x-1)$

3) знак выражения $2^{15x^2+2}-2^{11x}$ совпадает со знаком выражения

$$(2-1)(15x^2+2-11x) = 15x^2-11x+2 = (5x-2)(3x-1)$$

В исходном неравенстве заменяем каждый множитель на выражение того же знака, получаем

$$\frac{(5x-2)(2x-1)(7x-2)(3x-1)}{(5x-2)(3x-1)} \geq 0,$$

**обязательно
учитывая при
этом ОДЗ:**

ОДЗ:
$$\begin{cases} 5x - 1 > 0 \\ 7x - 1 > 0 \\ 0 < 2x \neq 1 \\ 0 < 3x \neq 1 \\ 2^{15x^2+2} - 2^{11x} \neq 0 \end{cases}$$

$$\underline{x > \frac{1}{5}; \quad x \neq \frac{1}{3}; \quad x \neq \frac{2}{5}; \quad x \neq \frac{1}{2}.}$$

Неравенство
$$\frac{(5x-2)(2x-1)(7x-2)(3x-1)}{(5x-2)(3x-1)} \geq 0$$

имеет решение:
$$\left(-\infty; \frac{2}{7}\right] \boxtimes \left[\frac{1}{2}; +\infty\right).$$

С учётом ОДЗ, окончательно получим
$$\left(\frac{1}{5}; \frac{2}{7}\right] \boxtimes \left(\frac{1}{2}; +\infty\right).$$

**Продолжение следует,
до новых встреч**