

Применение производной к исследованию функций

презентация учителя математики
Верхнегерасимовской СШ I-III ступеней
Горбань Натальи Геннадиевны

Понятие **«производная»** возникло в XVII веке
в связи с необходимостью решения ряда
задач из физики, механики и математики.

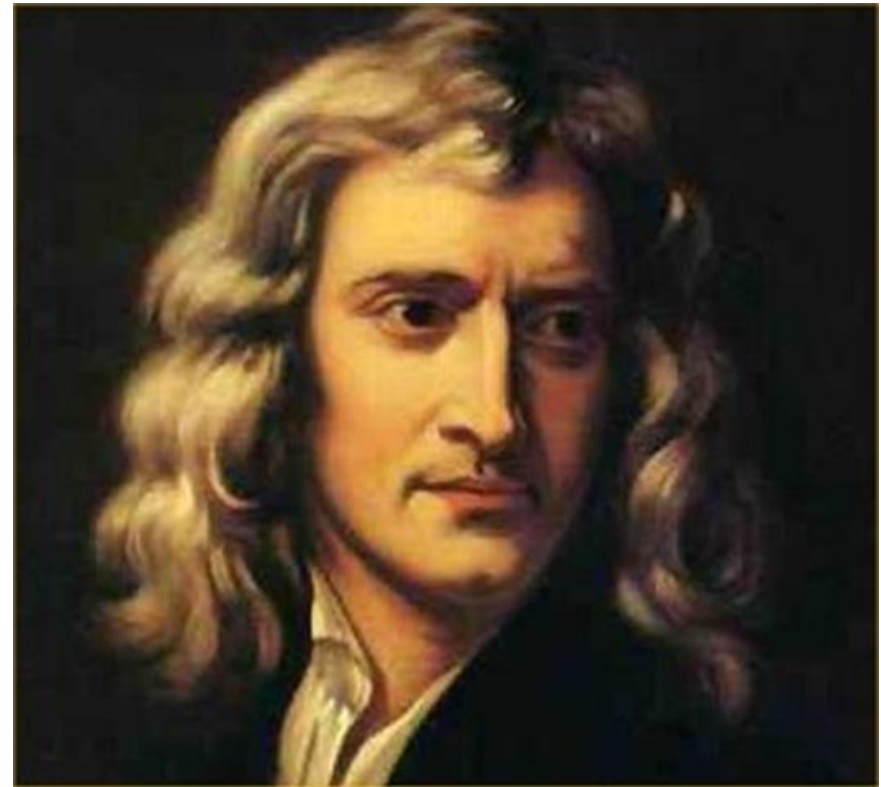
~~Готфрид Вильгельм фон~~

Лейбниц

Исаак Ньютон



1 июля 1646 — 14 ноября
1716,



25 декабря 1642 — 20 марта 1727

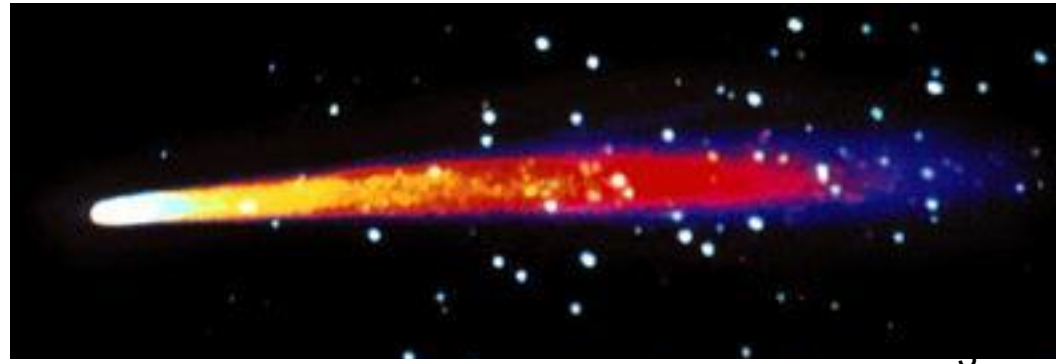


Используя методы дифференциального исчисления английский астроном, математик **Эдмон Галлей** ещё в XVII веке предсказал возвращение кометы Галлея.

В 1705 году Эдмонд Галлей предсказал, что комета, которую наблюдали в 1531, 1607 и 1682 годах, должна возвратиться в 1758 году (что, увы, было уже после его смерти). Комета действительно возвратилась, как было предсказано, и позже была названа в его честь.

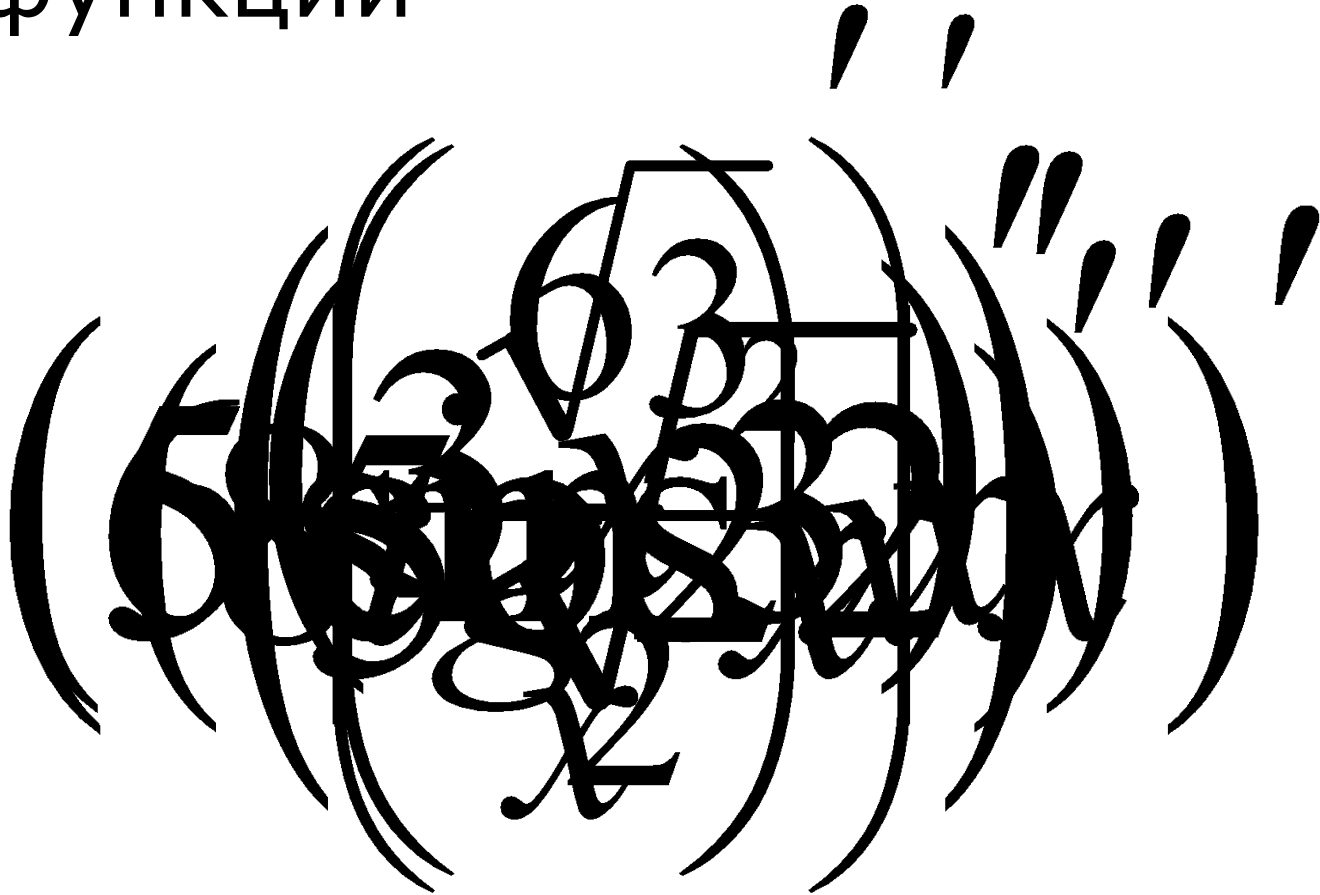


Комета Галлея вернется во внутреннюю Солнечную систему в следующий раз в 2061 году.



Размин

Найти производную
функции



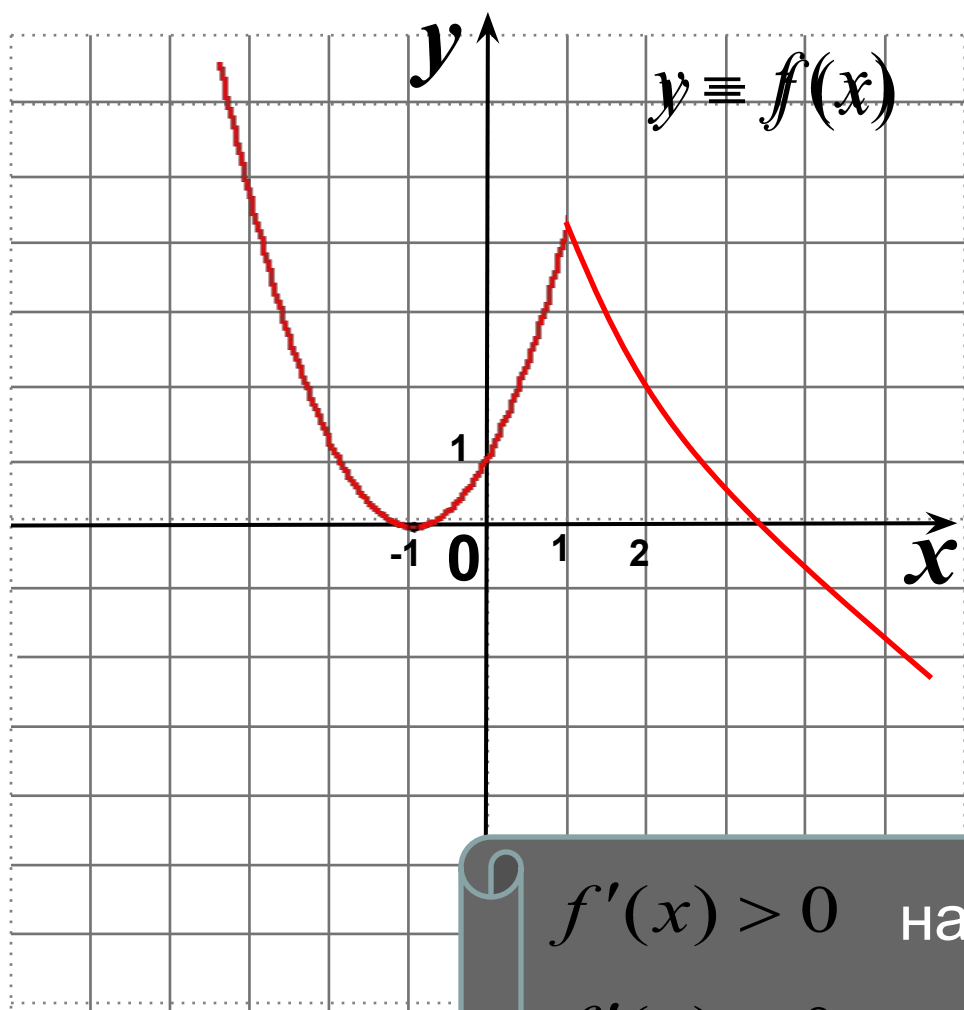
Признак возрастания и убывания функции

Достаточный признак убывания функции

*Если $f'(x) < 0$ в каждой точке интервала $(a; b)$,
то функция f убывает на интервале $(a; b)$*

Достаточный признак возрастания функции

*Если $f'(x) > 0$ в каждой точкех интервала $(a; b)$,
то функция f возрастает на интервале $(a; b)$*

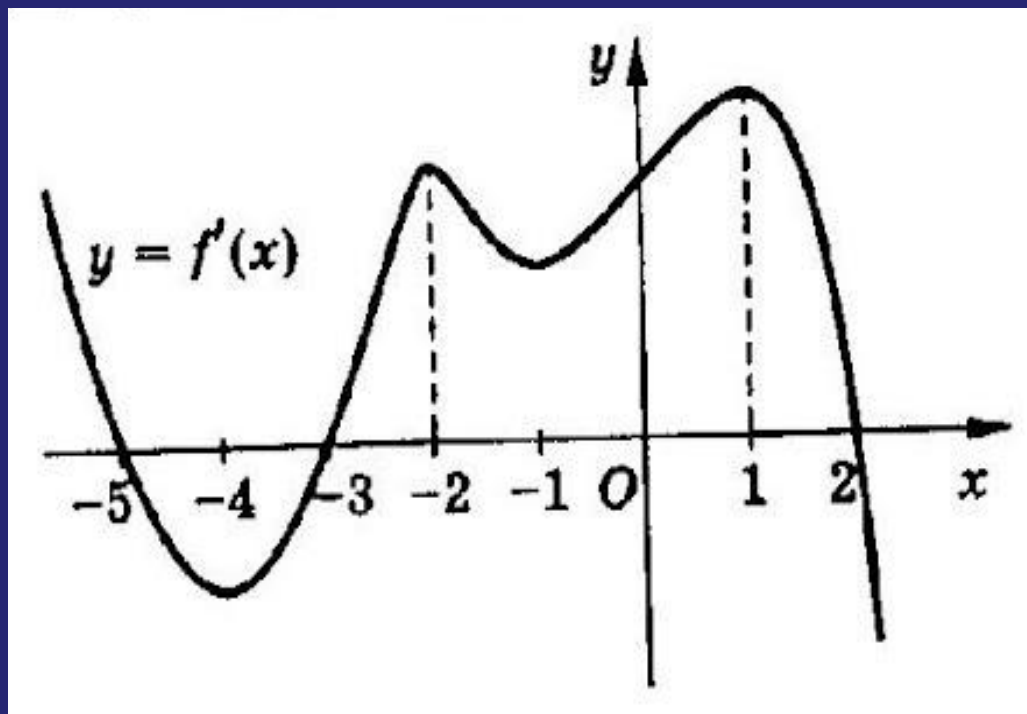


По характеру изменения графика функции укажите, на каких промежутках производная положительна, на каких отрицательна. Каждая из функций определена на $\mathbb{R}$

Ответ:

$$f'(x) > 0 \quad \text{на} \quad (-1; 1)$$

$$f'(x) < 0 \quad \text{на} \quad (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$$



По графику производной
 функции $y = f'(x)$
 определите
 промежутки возрастания
 и промежутки убывания
 функции $y = f(x)$

Ответ:

$f(x)$ возрастает на $(-\infty; -5) \cup (-3; 2)$

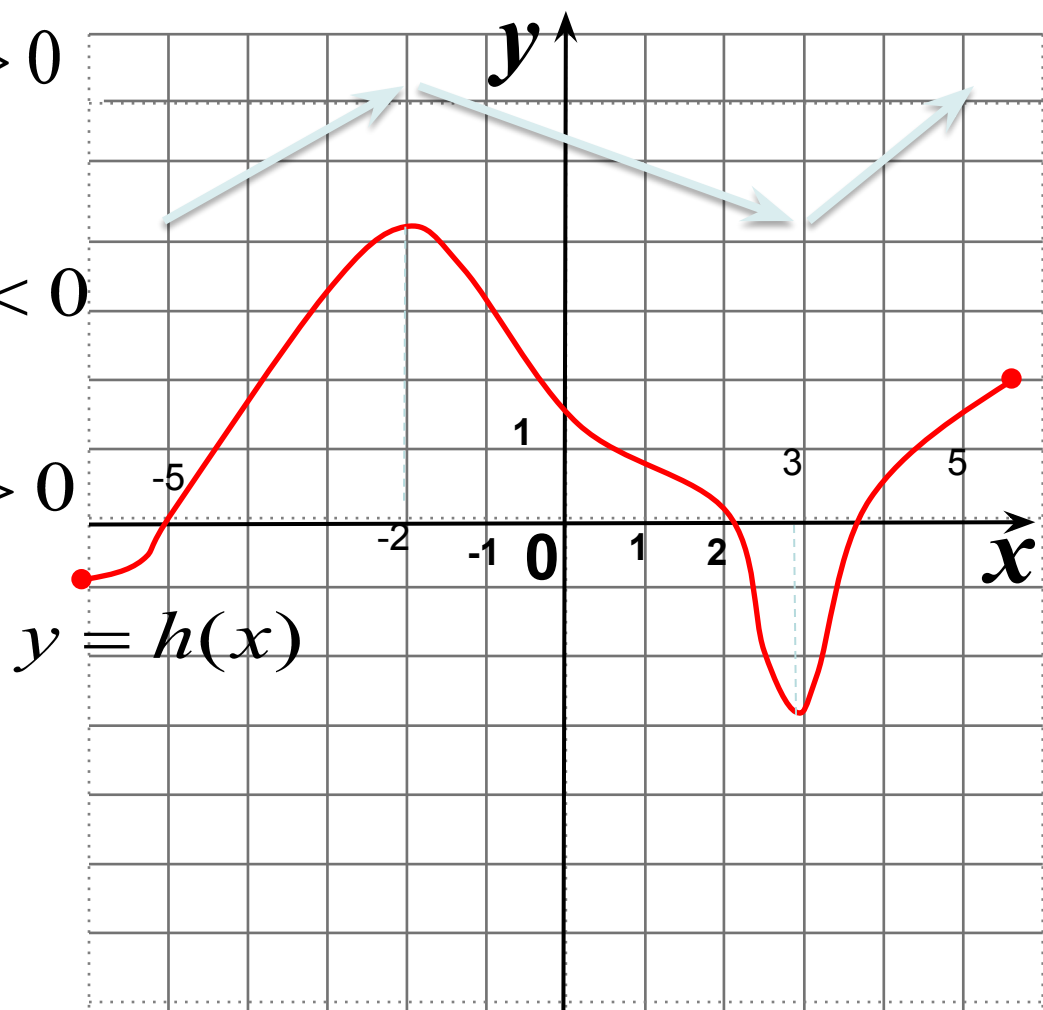
$f(x)$ убывает на $(-5; -3) \cup (2; +\infty)$

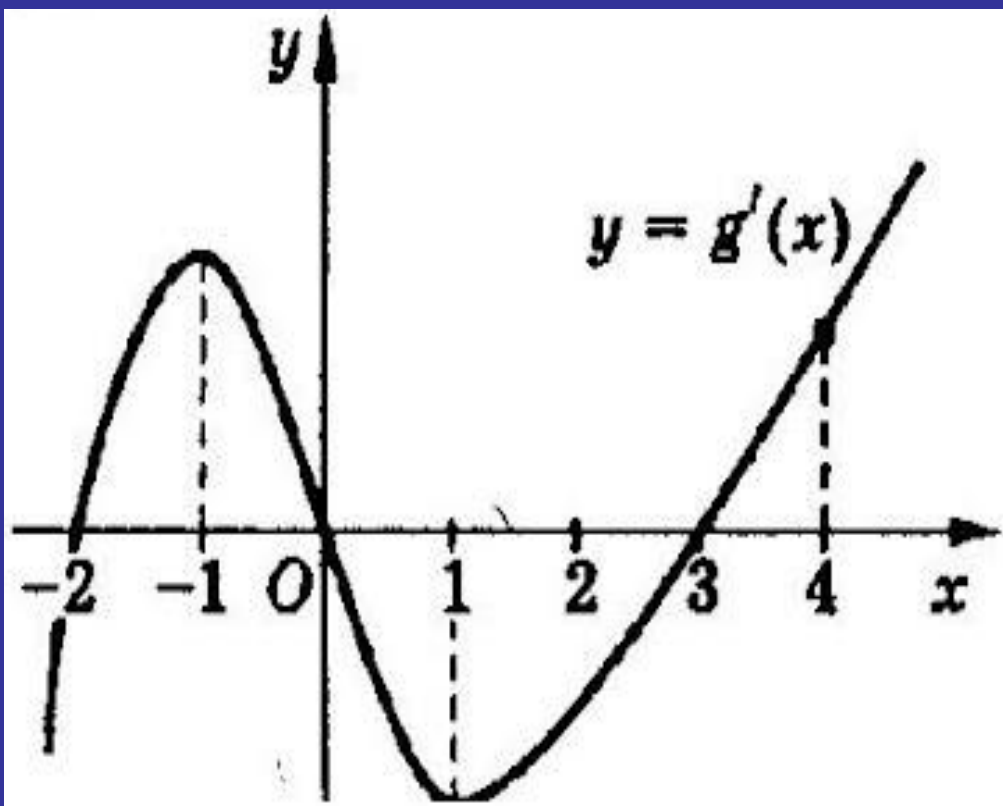
На рисунке изображен график дифференцируемой функции $y = h(x)$. Определите знак производной функции на промежутках

а) $[-5; -2)$ $h'(x) > 0$

б) $(-2; 3)$ $h'(x) < 0$

в) $(3; 5]$ $h'(x) > 0$



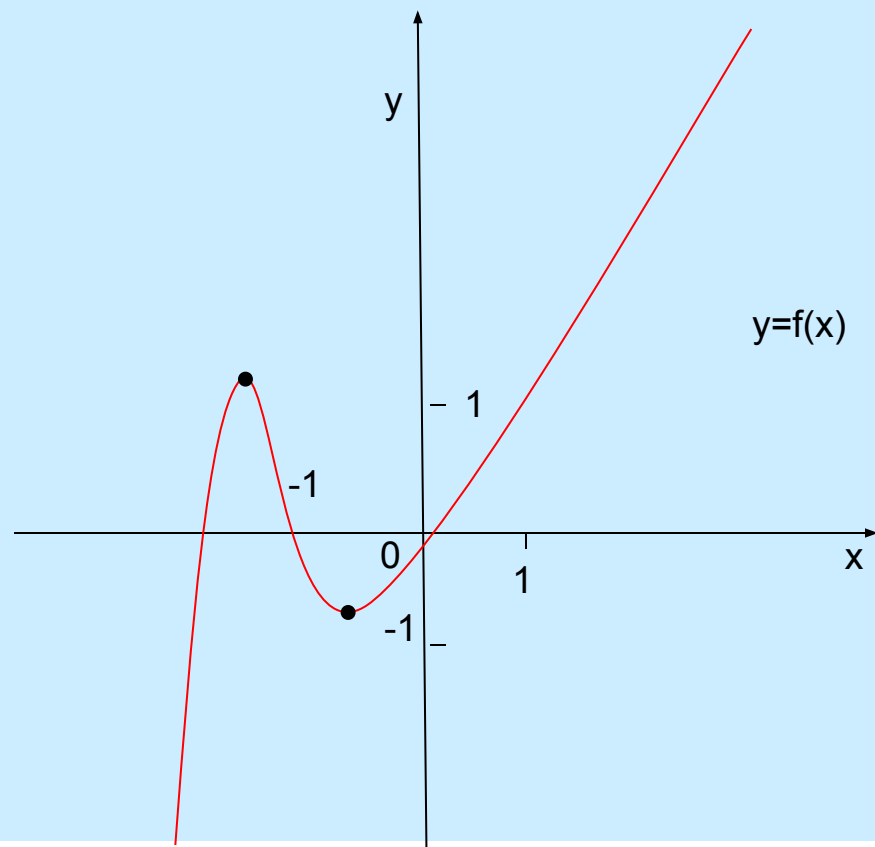


Укажите критические точки функции $y = g(x)$, используя график производной функции $y = g'(x)$

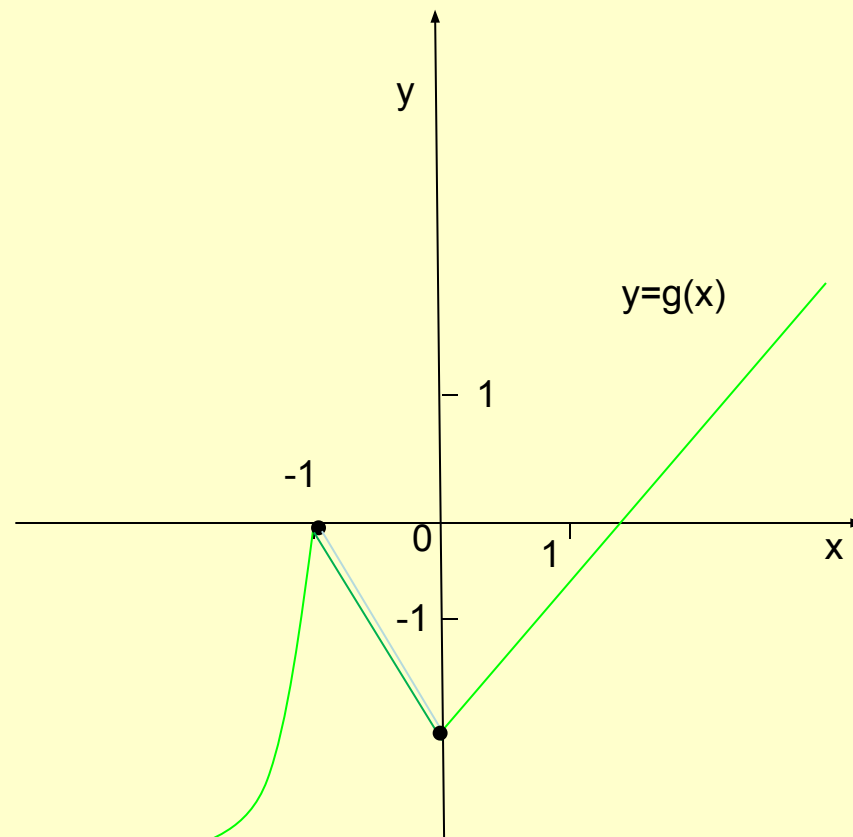
Ответ:

$$g'(x) = 0 \quad \text{при} \quad x = -2, x = 0, x = 3$$

Внутренние точки области определения функции, в которых **производная равна нулю** или **производная не существует**, называются **критическими**.



Касательная в таких точках графика параллельна оси **OX**, а поэтому производная в этих точках **равна 0**;



Касательная в таких точках графика **не существует**, а поэтому производная в этих точках **не существует**.

критические точки

производная равна нулю
(стационарные точки)

производная не существует

точка
максимума
«+» на «-»

точка
минимума
«-» на «+»

точка
перегиба
знак
не меняется

плавные линии

точка
максимума
«+» на «-»

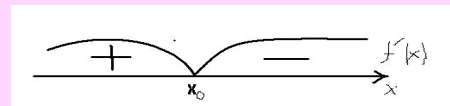
точка
минимума
«-» на «+»

точка
излома
знак
не меняется

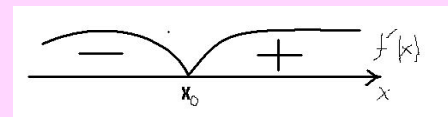
угловатые линии

Достаточное условие существования экстремума функции:

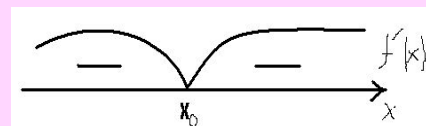
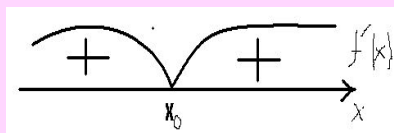
- 1) Если при переходе через критическую точку x_0 функции $f(x)$ ее производная меняет знак с «+» на «-», то x_0 – **точка максимума функции $f(x)$** .



- 2) Если при переходе через критическую точку x_0 функции $f(x)$ ее производная меняет знак с «-» на «+», то x_0 – **точка минимума функции $f(x)$** .



- 3) Если при переходе через критическую точку x_0 функции $f(x)$ ее производная не меняет знака, то в точке x_0 экстремума нет.





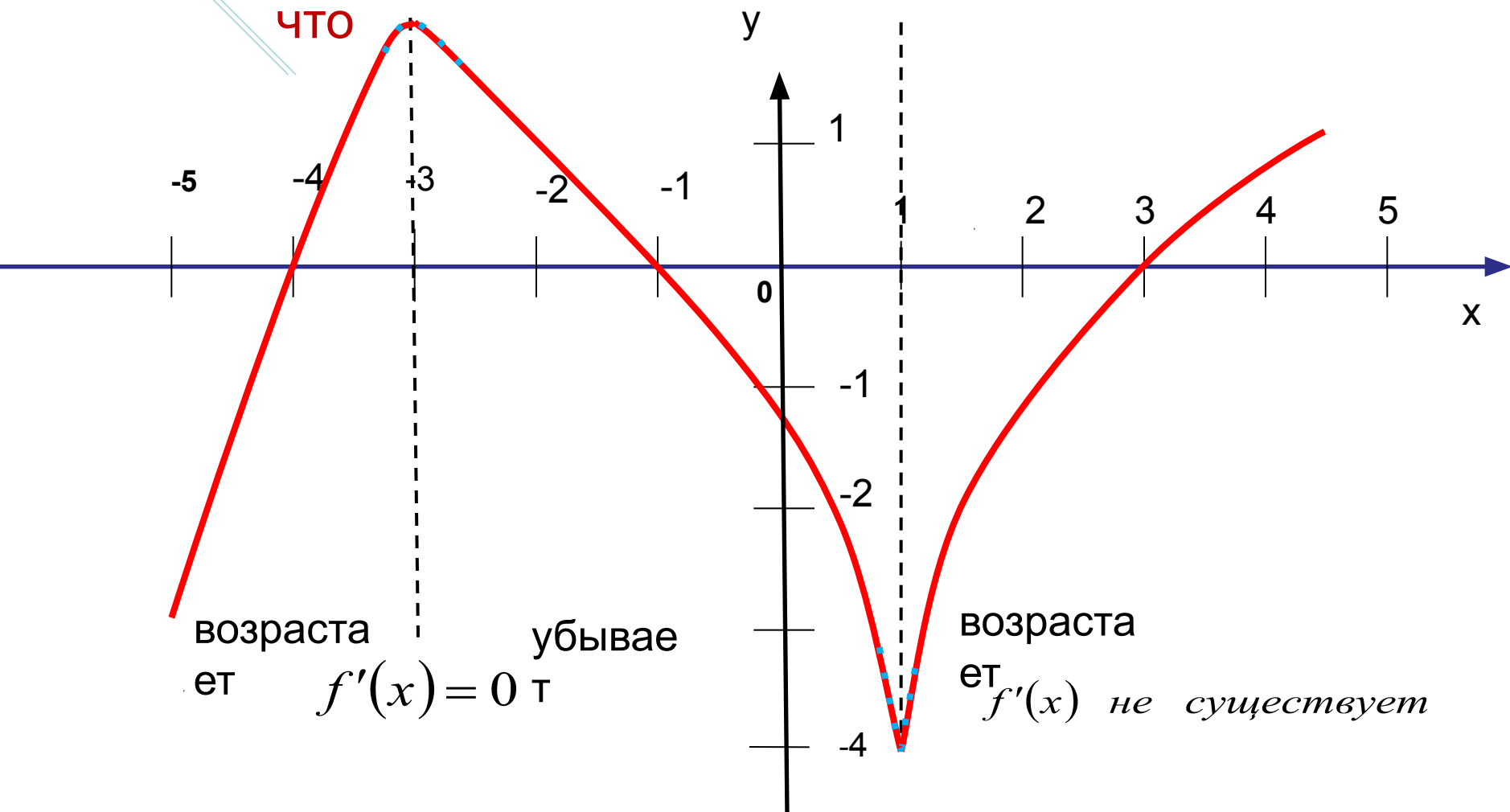
Исследование функций с
помощью производной и
построение графиков функций.



Схема исследования функции

1. Найти область определения функции;
2. Исследовать функцию на четность, нечетность, периодичность;
3. Найти точки пересечения графика функции с осями координат;
4. Исследовать функцию на монотонность, то есть найти промежутки возрастания и убывания функции;
5. Найти точки экстремума и экстремальные значения функции;
6. Построить график функции.

Построить эскиз графика функции, зная, что



возрастает

$$f'(x) = 0$$

убывает

возрастает

$f'(x)$ не существует

x	$(-\infty; -3)$	-3	$(-3; 1)$	1	$(1; +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	Не существует	+
$f(x)$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-4	$\nearrow$
		max		min	

Образец выполнения работы.

Оформление работы учеником.

$$y = \frac{1}{5}(x^3 + 4x^2 - 11x - 30)$$

а) $(-\infty; +\infty)$;

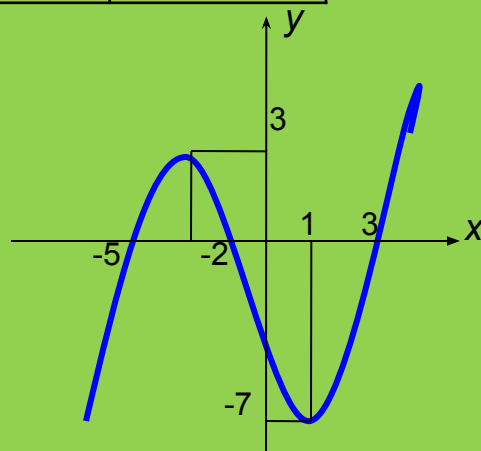
б) $y'(x) = \frac{1}{5}(3x^2 + 8x - 11) = \frac{3}{5}(x + \frac{11}{3})(x - 1)$;

в) критические точки: $-\frac{11}{3}$; 1.

г) по результатам исследования составляем таблицу:

x	$\left(-\infty; -3\frac{2}{3}\right)$	$-3\frac{2}{3}$	$\left(-3\frac{2}{3}; 1\right)$	I	$(1; +\infty)$
$y'(x)$	+	0	-	0	+
$y(x)$		$2\frac{26}{27}$		$-7\frac{1}{5}$	
экстремум		max		min	

д) строим график функции:





Задачи на нахождение наибольшего и наименьшего значений



Правило нахождения наибольшего и наименьшего значений функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$

Чтобы найти наибольшее и наименьшее значения непрерывной функции $f(x)$ на промежутке $[a;b]$, нужно

1. вычислить её значения $f(a)$ и $f(b)$ на концах данного промежутка
2. вычислить её значения в критических точках, принадлежащих этому промежутку
3. выбрать из них наибольшее и наименьшее.

Записывают так: **$\max_{[a;b]} f(x)$** и **$\min_{[a;b]} f(x)$**