

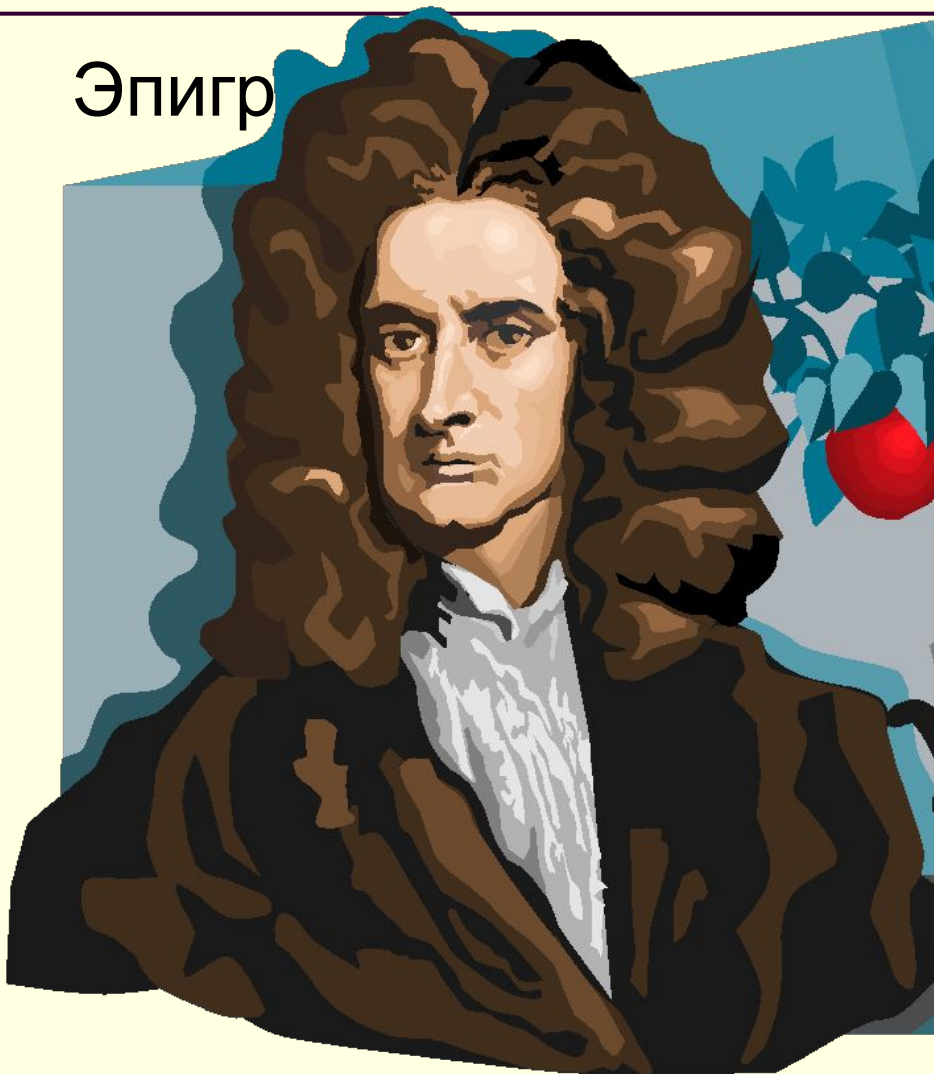
Понятие производной

Алгебра и начала анализа
11 класс



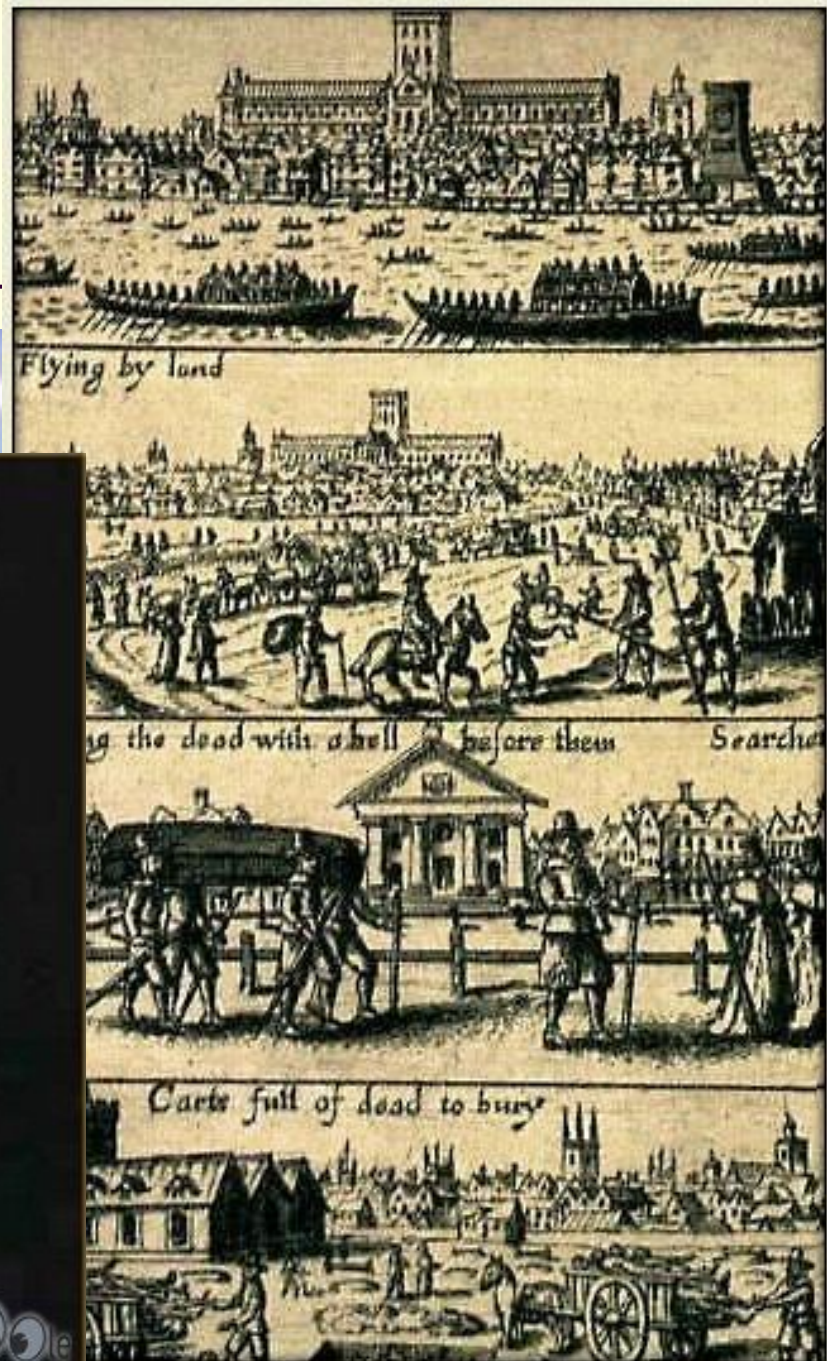
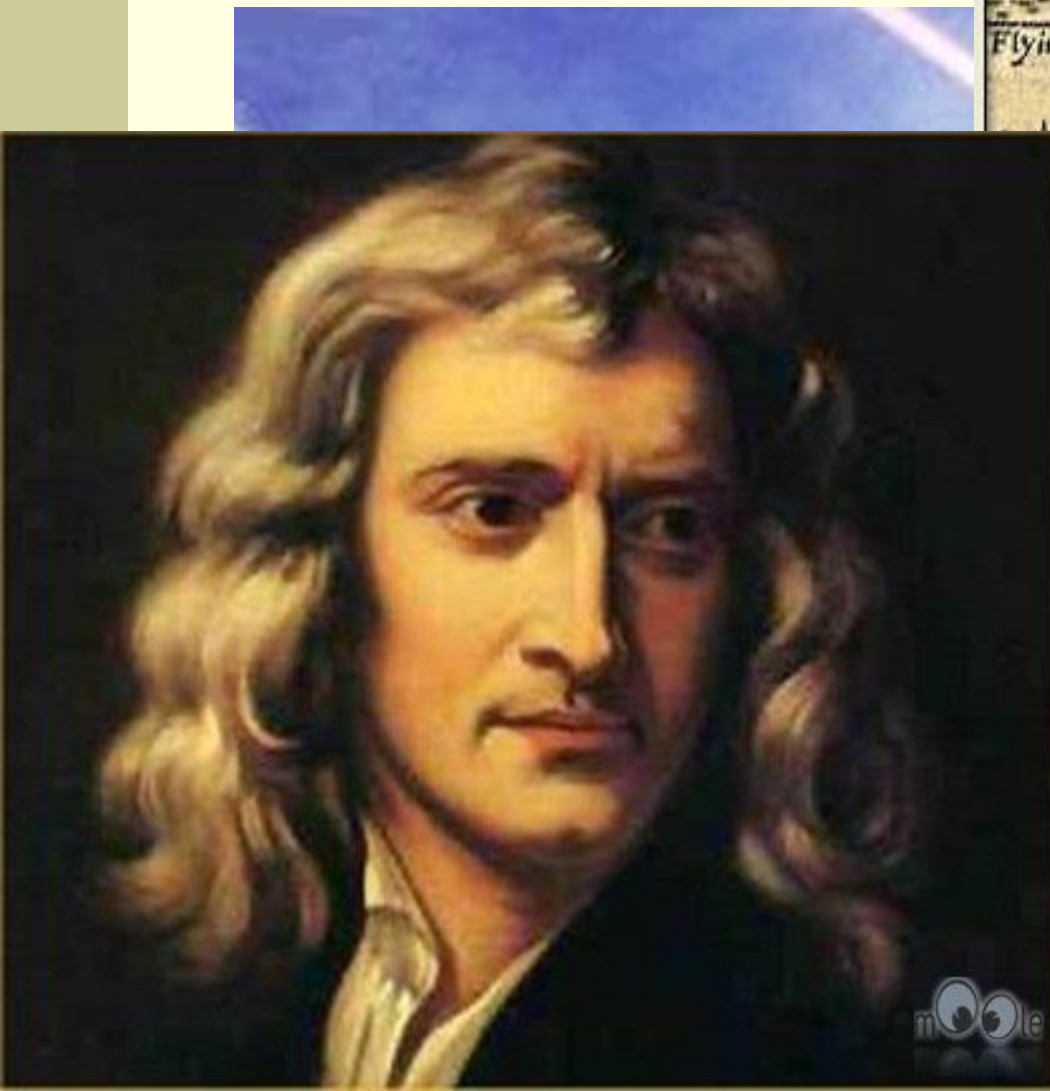
Сегодня у нас праздник!

Эпигр



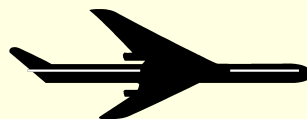
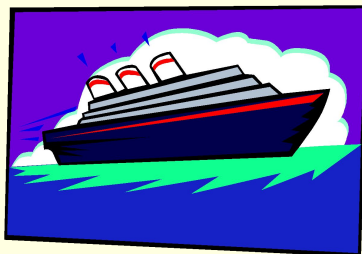
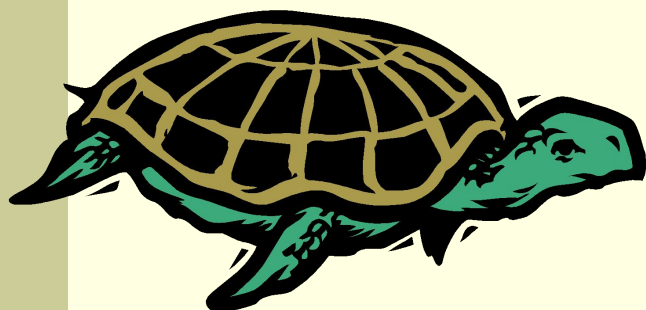
-
- **Что такое высшая математика?**
 - **Когда она появилась?**
 - **Что такое производная?**

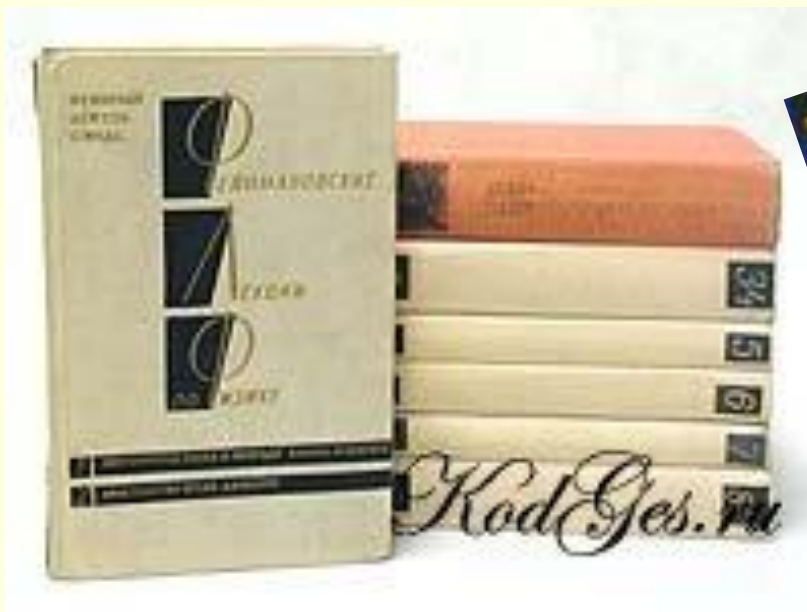
Как это было...



Ответим на вопрос:

■ Что такое скорость?





Возможно, это было так...

- Пусть точка движется вдоль прямой по закону $S(t)$.

Тогда за промежуток времени t точка проходит расстояние $S(t)$.

Пусть Δt – малый промежуток времени.

Путь, пройденный за время $t + \Delta t$, равен $S(t + \Delta t)$.

Тогда средняя скорость

$$v_{cp.} = \frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{\Delta t}$$

- Очевидно, если $\Delta t \rightarrow 0$, то $V_{\text{ср.}} \rightarrow V_{\text{мгн.}}$

Значит,

$$v_{\text{мгн.}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{\Delta t}$$

или

$$v_{\text{мгн.}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t},$$

где Δt – приращение времени
 ΔS - приращение пути.

А в это время...

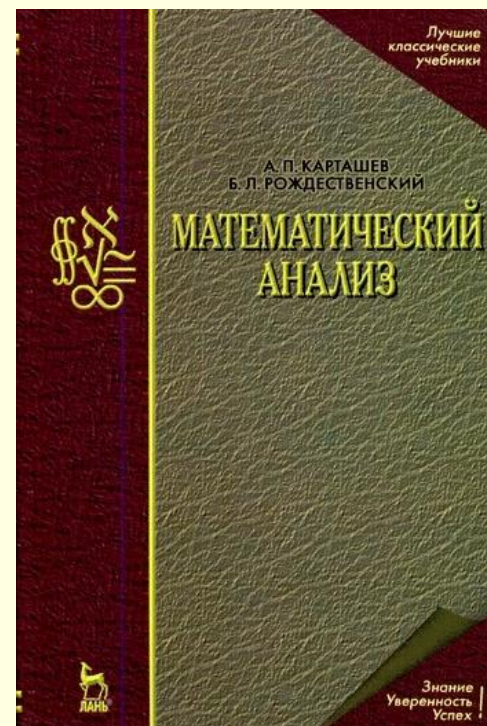
- **Лейбниц Готфрид Вильгельм, немецкий математик, физик, философ.**

Лейбниц – прямая противоположность И.Ньютону



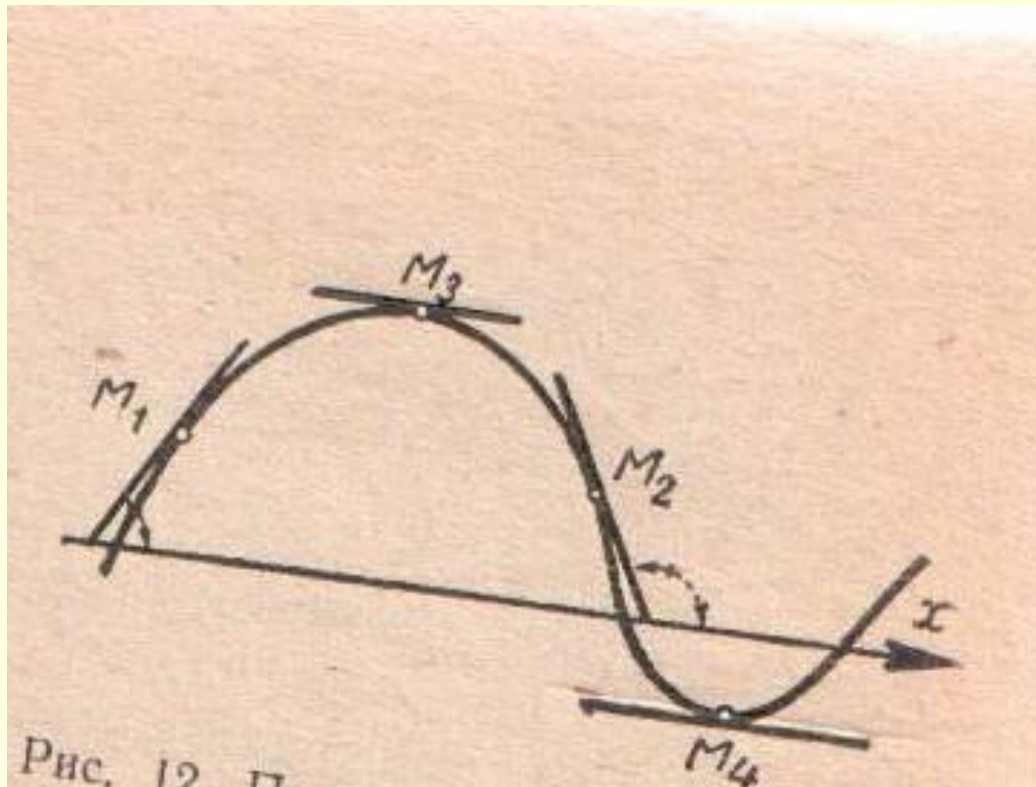
И еще:

- Одновременно, но независимо друг от друга они подошли к открытию анализа бесконечно малых.

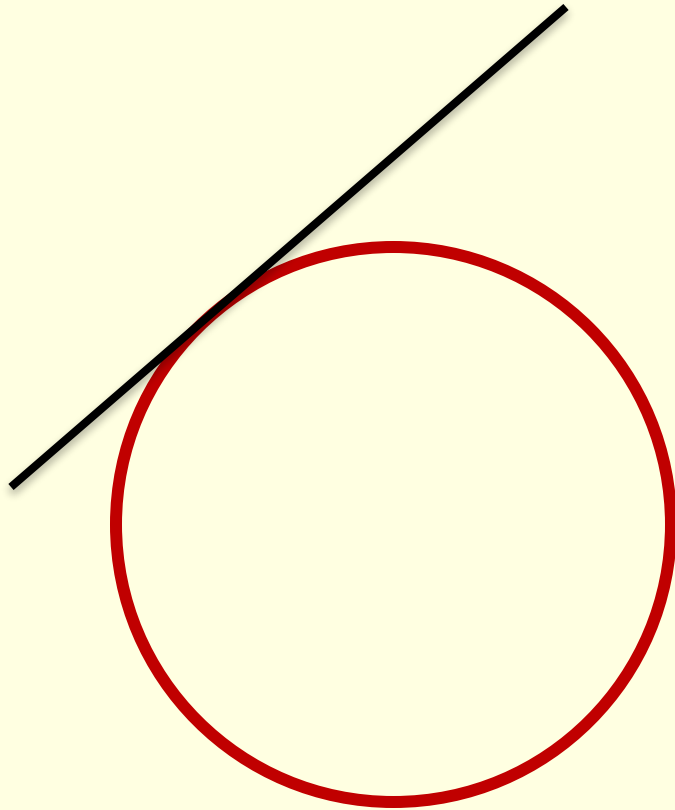


Возможно, это было так...

- **Началось все с касательной!!!**



А что такое касательная?



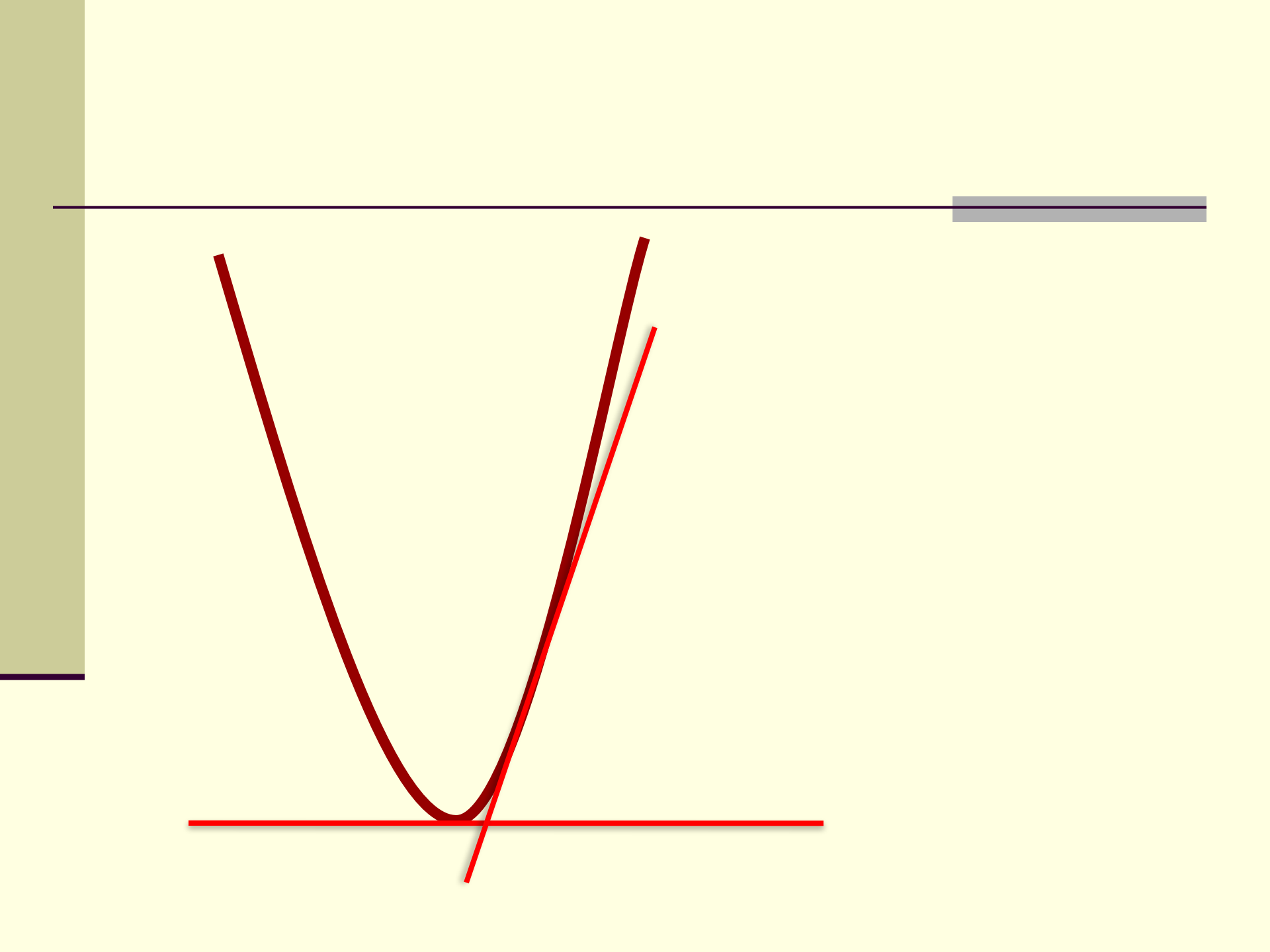
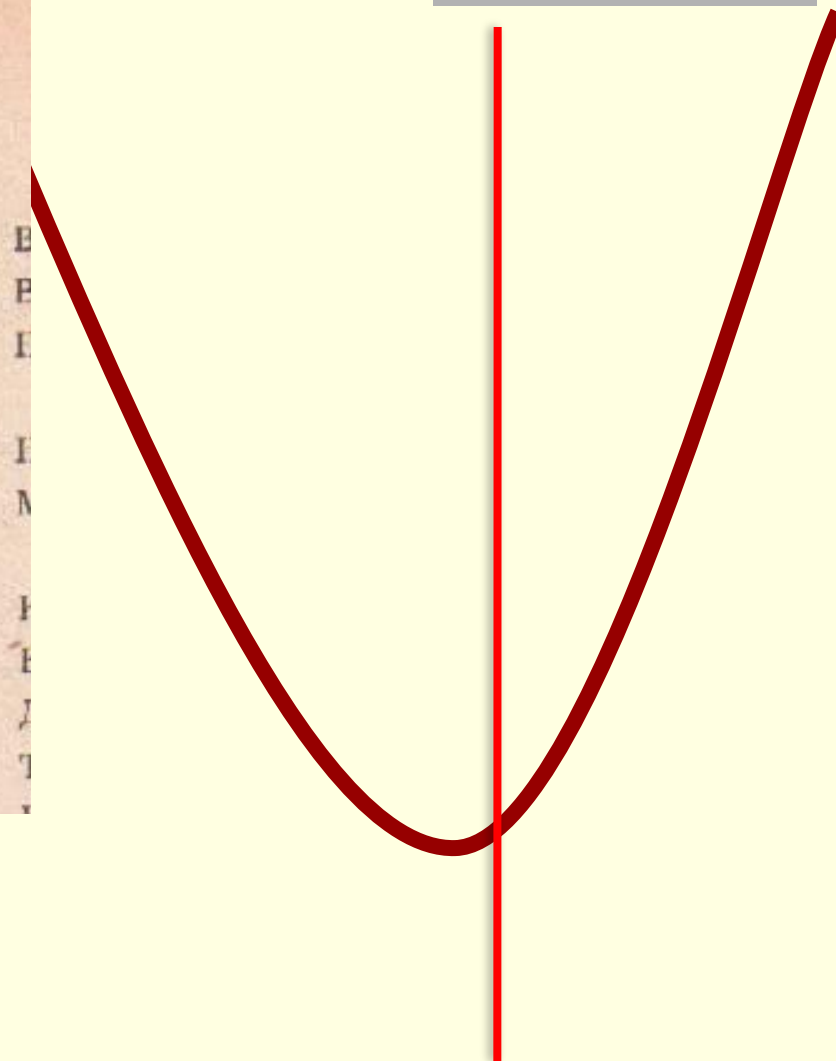
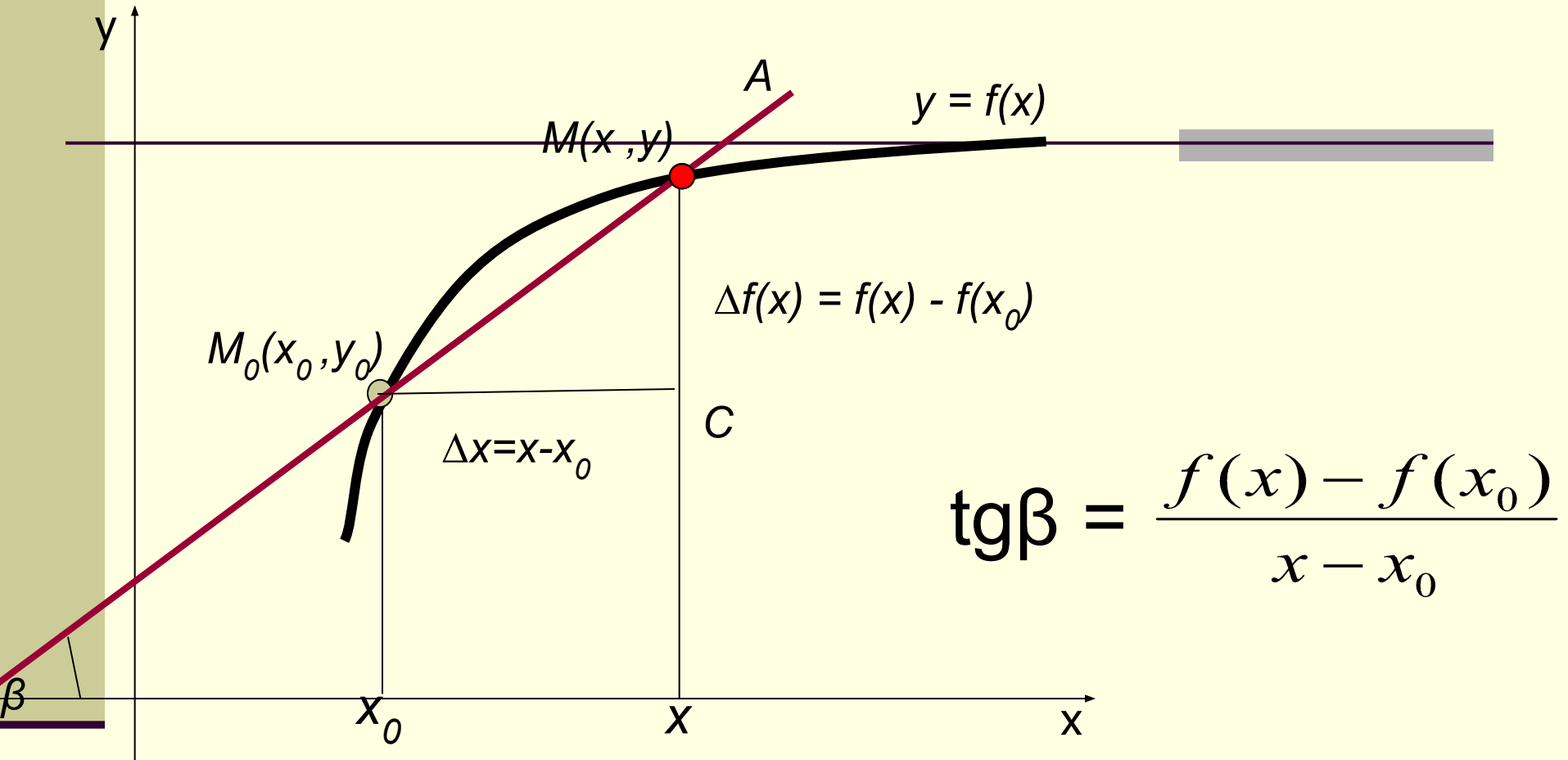




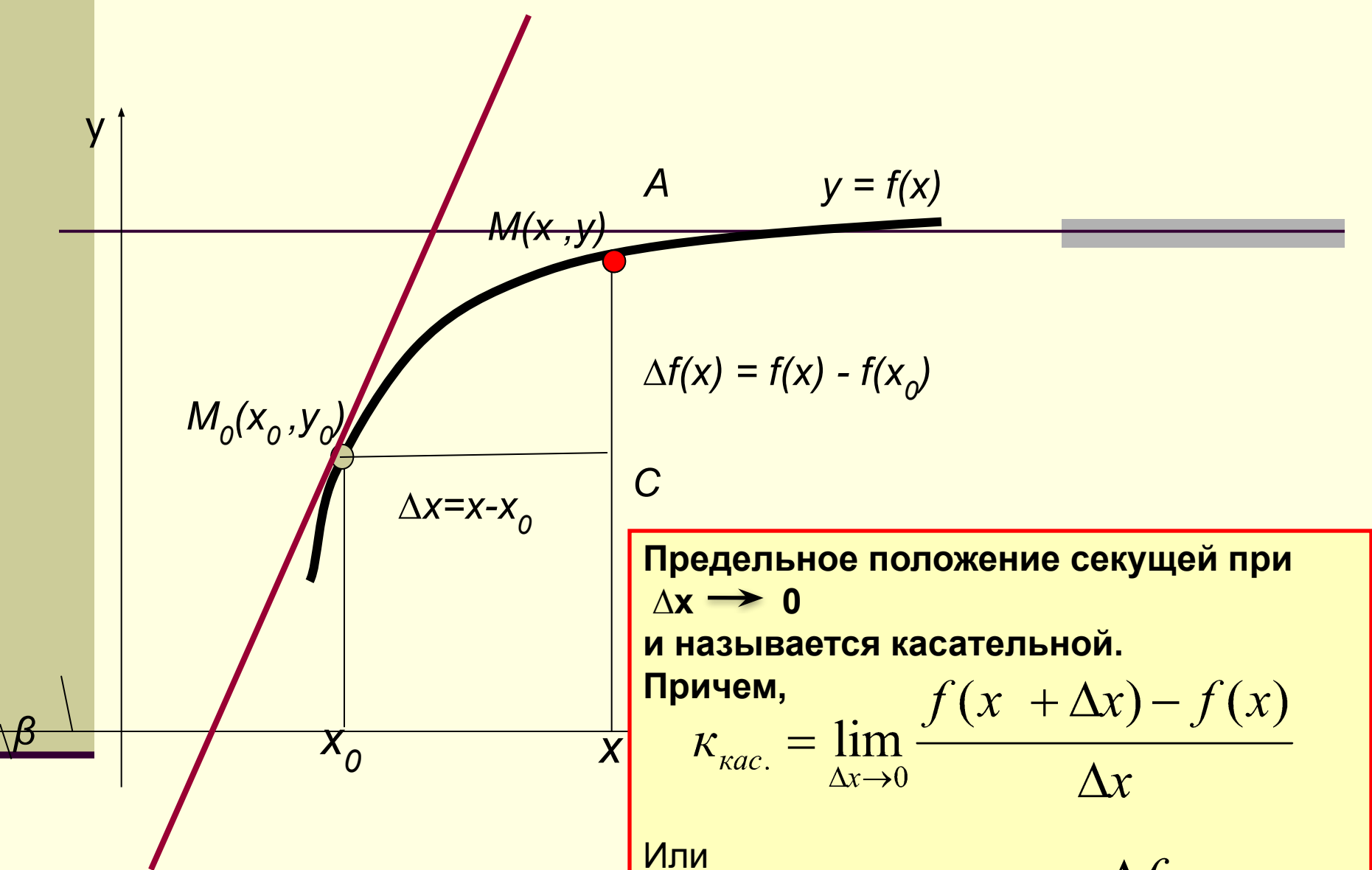
Рис. 15. Точка перегиба.



Задача о касательной к графику функции



При $x \rightarrow x_0$ $\lim_{x \rightarrow x_0} \operatorname{tg} \beta = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$



Предельное положение секущей при $\Delta x \rightarrow 0$ и называется касательной.

Причем,

$$K_{\text{кас.}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Или

$$K_{\text{кас.}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Сравните:

$$v_{\text{мгн.}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}, \quad K_{\text{кас.}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

По секрету:

**ЭТО И ЕСТЬ
ПРОИЗВОДНАЯ!**

Задаем функцию $y = f(x)$ на $(a; b)$

Пусть x_0 — некоторое значение аргумента из интер. $(a; b)$

$f(x_0)$ — значение функции в т. x_0 .

Дадим x_0 приращение Δx , получим точку $x = x_0 + \Delta x$ (т.е. $\Delta x = x - x_0$)

Значение функции в этой т.

$$f(x) = f(x_0 + \Delta x)$$

Найдем приращение функции:

$$\Delta f = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

Найдем отношение:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Найдем $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$. Это и есть производная

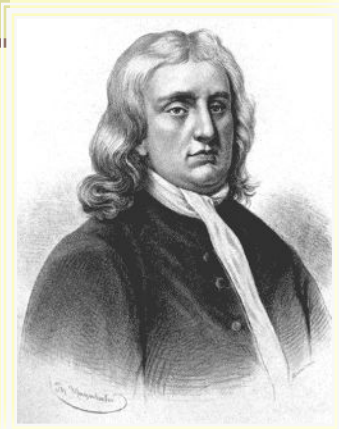
Определение:

Производной функции $y = f(x)$, заданной на интервале (a, b) , в точке x этого интервала называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю.

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Итак,

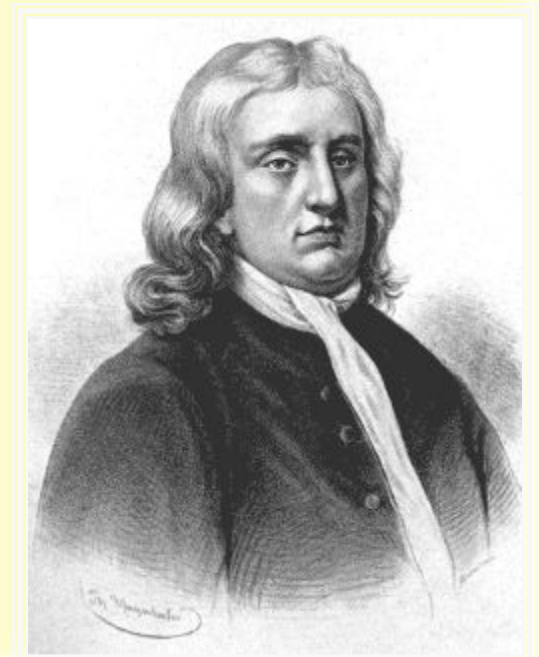
- **Ньютон, а затем Лейбниц, независимо друг от друга, пришли к открытию дифференциального и интегрального исчислений.**



Механический смысл производной:

- Производная пути по времени есть скорость

$$V(t) = S'(t)$$



Геометрический смысл производной:

- **Тангенс угла наклона касательной, проведенной к кривой в точке x_0 , равен значению производной в этой точке.**

$$K_{\text{кас.}} = f'(x_0)$$

