

Показательные уравнения

Учитель МБОУ «СОШ №31»
г.Энгельса Волосождар М.И.

Показательные уравнения – это уравнения, содержащие переменную в показателе степени.

Решение показательных уравнений часто сводится к решению уравнения вида $a^x = a^b$, где $a > 0$, $a \neq 1$, x – неизвестное.

Эти уравнения решаются с помощью свойства степени: степени с одинаковыми основаниями $a > 0$, $a \neq 1$ равны только тогда, когда равны их показатели.

Рассмотрим различные типы показательных уравнений и типы их решения.

1. Решение уравнений с использованием свойств показательной функции:

Пример 1. Решить уравнение

$$0,125 * 4^{2x-8} = \left(\frac{0,25}{\sqrt{2}} \right)^{-x}$$

Решение.

Так как $0,125 = 125/1000 = 1/8$, $0,25 = 1/4$ и $\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$, то уравнение примет вид:

$$\frac{1}{8} * (2^2)^{2x-8} = \left(\frac{1}{4} * 2^{-\frac{1}{2}} \right)^{-x} \text{ ИЛИ } 2^{-3} * 2^{4x-16} = \left(2^{-2} * 2^{-\frac{1}{2}} \right)^{-x}$$
$$2^{-3+4x-16} = 2^{\frac{5}{2}x}$$

Т.к. $2 > 0$, $2 \neq 1$, то $-3+4x-16 = 2,5x$ или $1,5x = 19$, $3x = 38$, $x = \frac{38}{3}$

ОТВЕТ: $x = \frac{38}{3}$

2. Решение уравнений, сводящихся к квадратным

Пример 2. Решить уравнение

$$2^{\sin^2 x} + 4 * 2^{\cos^2 x} = 6$$

Решение.

Так как $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, то уравнение запишется в виде

$$2^{\sin^2 x} + 4 * 2^{1 - \sin^2 x} = 6 \quad \text{или} \quad 2^{\sin^2 x} + \frac{8}{2^{\sin^2 x}} = 6$$

Пусть $2^{\sin^2 x} = t$, $t > 0$, тогда получим $t + \frac{8}{t} = 6$ или $t^2 - 6t + 8 = 0$, откуда $t=2$, $t=4$. Имеем два уравнения:

1. $2^{\sin^2 x} = 2$, $\sin^2 x = 1$, $\cos^2 x = 0$, $\cos x = 0$, $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$
2. $2^{\sin^2 x} = 4$, $\sin^2 x = 2$, нет корней, так как $|\sin x| \leq 1$

ОТВЕТ: $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$

3. Решение уравнений вынесением

общего множителя за скобку

Пример 3. Решить уравнение

$$5^{2x+1} - 3 * 5^{2x-1} = 110$$

Решение.

Вынесем за скобку 5^{2x-1} - степень с наименьшим показателем.

$$5^{2x-1}(5^2 - 3) = 110, \quad 5^{2x-1} * 22 = 110, \quad 5^{2x-1} = 5 \quad \text{или} \quad 2x - 1 = 1$$

$$2x - 1 = 1, \quad x = 1$$

ОТВЕТ: $x = 1$

4. Решение показательных уравнений логарифмированием обеих частей

Пример 4. Решить уравнение

$$16^{\frac{x-1}{x}} * 5^x = 100$$

Решение.

Прологарифмируем данное уравнение по основанию 5 (или 2).

Следует заметить, что можно, вообще говоря, логарифмировать по любому основанию, но не совсем удачный выбор основания может привести к громоздким вычислениям.

Имеем:

$$x + 4 * \frac{x-1}{x} \log_5 2 = 2 + 2 \log_5 2$$

ИЛИ

$$x^2 + 4(x-1) \log_5 2 = 2x + 2x \log_5 2 ,$$

$$x^2 + 2x \log_5 2 - 2x - 4 \log_5 2 = 0 ,$$

$$x^2 + 2(\log_5 2 - 1)x - 4 \log_5 2 = 0 ,$$

$$\frac{D}{4} = (\log_5 2 - 1)^2 + 4 \log_5 2 = (\log_5 2 + 1)^2 ,$$

$$x_{1,2} = 1 - \log_5 2 \pm (\log_5 2 + 1) , \text{ откуда}$$

$$x_1 = 2 ; \quad x_2 = -2 \log_5 2$$

ОТВЕТ: $2; -2 \log_5 2$

5. Решение уравнений с использованием свойства монотонности показательной функции.

При решении некоторых типов показательных уравнений используются следующие свойства:

1. Если функция f возрастает (или убывает) на некотором промежутке, то на этом промежутке уравнение $f(x)=0$ имеет не более одного корня.

2. Показательное уравнение вида $a^x + b^x = (a + b)^x$,

где $a > 0$, $b > 0$, $a \neq 1$, $b \neq 1$

имеет единственный корень $x=1$.

3. Сумма монотонно возрастающих (или монотонно убывающих) функций есть также функция монотонно возрастающая (монотонно убывающая).

Пример 5. Решить уравнение.

$$\text{а) } 2^x + 3^x = 35^{\frac{x}{3}} \quad \text{б) } 5^x - 2^x = 3$$

Решение.

а) Данное уравнение можно привести к виду $a^x - b^x = (a + b)^x$

Так как $2^x = 8^{\frac{x}{3}}$ и $3^x = 27^{\frac{x}{3}}$, то получим $8^{\frac{x}{3}} + 27^{\frac{x}{3}} = 35^{\frac{x}{3}}$

Очевидно, что $x=3$ – корень уравнения.

$$\text{б) } 5^x = 2^x + 3 \quad \text{или} \quad 1 = 3 * \left(\frac{1}{5}\right)^x + \left(\frac{2}{5}\right)^x$$

$$\text{Пусть} \quad f' = 3 * \left(\frac{1}{5}\right)^x + \left(\frac{2}{5}\right)^x - 1$$

$$\text{Найдем} \quad f'(x) = 3 \ln \frac{1}{5} * \left(\frac{1}{5}\right)^x + \left(\frac{2}{5}\right)^x \ln \frac{2}{5} < 0$$

Так как $f'(x) < 0$, то функция $f(x)$ – монотонно убывающая, значит $x=1$ – единственный корень исходного уравнения.

ОТВЕТ: а) 3; б) 1

Спасибо за внимание !