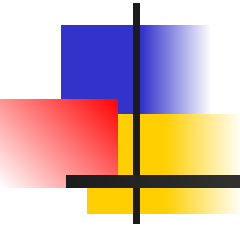


О ПОСТРОЕНИИ ДЕРЕВА ХАФФМАНА



Э. Ю. Джигладзе



Цели и задачи

Цель работы – изучение возможности параллельной реализации алгоритма Хаффмана, основанной на расширении операций матричной алгебры

Задачи

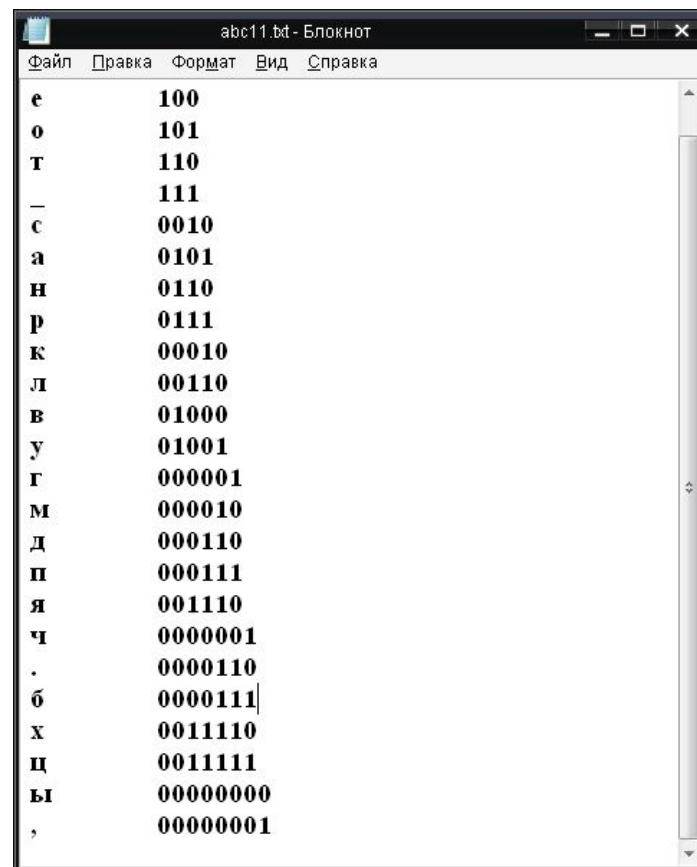
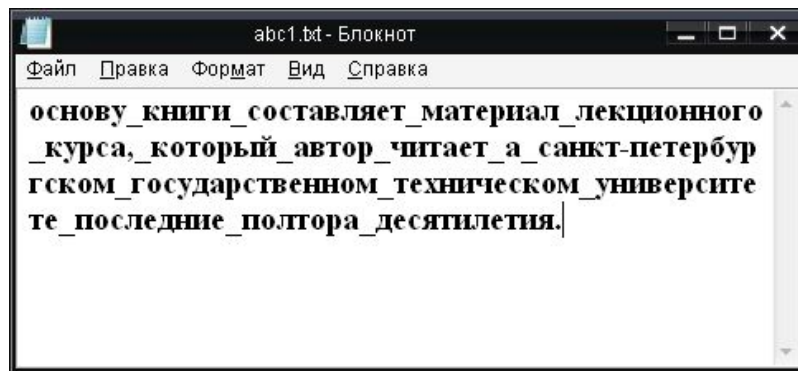
- программная реализация оптимального кода Хаффмана;
- оценка сложности последовательного алгоритма;
- реализация параллельного алгоритма матрично-векторного умножения;
- реализация параллельного алгоритма построения дерева Хаффмана;
- оценка сложности параллельного алгоритма построения дерева Хаффмана.



Алгоритм построения оптимального кода Хаффмана

1. Символы входного алфавита образуют список из N свободных узлов. Вес узла равен либо вероятности, либо количеству вхождений элемента алфавита в сжимаемое сообщение.
2. Выбираются два свободных узла дерева с наименьшими весами.
3. Создается их родитель с весом, равным их суммарному весу.
4. Родитель добавляется в список свободных узлов, а двое его детей удаляются из этого списка.
5. Одной дуге, выходящей из родителя, ставится в соответствие бит 1 , а другой – бит 0 .
6. Шаги, начиная со второго, повторяются до тех пор, пока в списке свободных узлов не останется только один свободный узел. Он и будет считаться корнем дерева.

Реализация последовательного алгоритма





Оценка сложности последовательного алгоритма

Пусть M – число символов в сообщении, кодируемых по Хаффману и принадлежащих исходному алфавиту из N элементов.

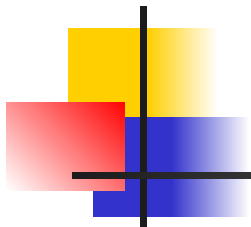
Временные сложности этапов:

1. определение весов дерева по исходному сообщению $T1(1)=O(M)$;
2. выбор двух минимальных весов $T2(1)=O((N^3)/2)$;
3. замена исходных символов кодами $T3(1)=O(M)$ или для адаптивных версий алгоритма: $T3(1)=0$.

Таким образом, общее время построения дерева и собственно кодирования даже для улучшенных адаптивных версий будет не менее

$$T(1)=T1(1)+T2(1)+T3(1) = M+(N^3)/2.$$

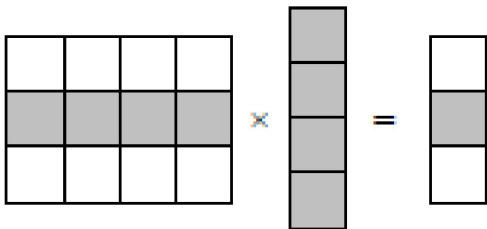
Матрично-векторное умножение



Ленточное разбиение:

Обычное представление:

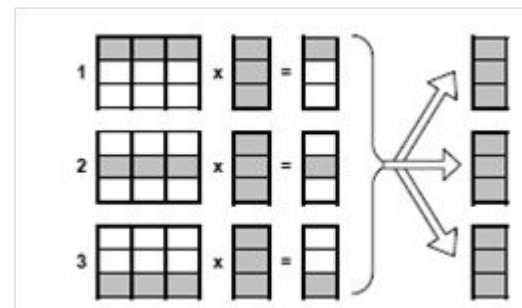
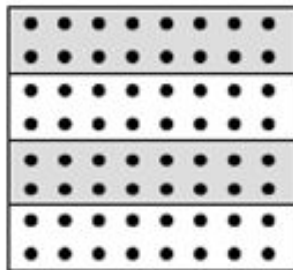
$$c_i = (a_i, b) = \sum_{j=1}^n a_{i,j} b_j, 1 \leq i \leq m$$



Горизонтальное разбиение по строкам:

$$A = (A_0, A_1, \dots, A_{p-1})^T, A_i = (a_{i_0}, a_{i_1}, \dots, a_{i_{k-1}}), i_j = i * k + j, 0 \leq j < k, k = m / p,$$

где $a_i = (a_{i_0}, a_{i_1}, \dots, a_{i_k})$, $0 \leq i < m$ - i -я строка матрицы A (предполагается, что количество строк m кратно числу процессоров p , т.е. $m = k \cdot p$)



Результаты работы программы

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 14 \\ 21 \\ 28 \\ 35 \\ 42 \end{pmatrix}$$

The screenshot shows the 'guiMPIRun' application window. The 'Application' field is set to 'C:\Test_mpch\mpi20002.exe'. The 'Number of processes' is set to 5. The 'Output' field shows the following text:

```
7
Parallel matrix-vector multiplication program
Enter size of the initial objects!
1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000
0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000
Initial Matrix:
0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000
1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000
2.0000 2.0000 2.0000 2.0000 2.0000 2.0000 2.0000
3.0000 3.0000 3.0000 3.0000 3.0000 3.0000 3.0000
4.0000 4.0000 4.0000 4.0000 4.0000 4.0000 4.0000
5.0000 5.0000 5.0000 5.0000 5.0000 5.0000 5.0000
6.0000 6.0000 6.0000 6.0000 6.0000 6.0000 6.0000
Initial Vector:
1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000

0.0000 7.0000 14.0000 21.0000 28.0000 35.0000 42.0000
```

The 'Advanced Options' section on the right shows 'Any hosts' selected, and the 'Hosts' section is empty. The 'Ready' status is shown at the bottom left, and the 'NUM' button is at the bottom right.

Использование матричных операций при построении дерева алгоритма Хаффмана

Алгоритм:

Определить частоты встречаемости символов в сообщении, составляющих его алфавит. N ненулевых элементов алфавита – исходное множество узлов дерева.

- Пока число новых узлов меньше $N-1$
 - Упорядочить узлы.
 - Добавить новый узел, соответствующий двум минимальным.
 - Для всех символов алфавита добавить очередной разряд в код Хаффмана.
- Конец Пока
- Заменить символы на их коды.

Использование матричных операций при построении дерева алгоритма Хаффмана

Рассмотрим множество, состоящее из элементов $0, 1, \omega$. Пусть T – множество, которому принадлежат элементы матрицы, и $P, P1, P2$ – предикаты, определенные на T . Тогда операции умножения и сложения любых $a, b \in T$ определим следующим образом

$$a \otimes b = \begin{cases} 1, P1 \\ 0, P2 \\ \omega, \neg P1 \wedge \neg P2, \end{cases} \quad (2) \quad a \oplus b = \begin{cases} b, P \\ a, b = \omega \wedge \neg P. \end{cases}$$

Элементы C_{ij} матрицы
формулам

$C = A \times B$ будем вычислять по следующим

$$C_{i,j} = A_{i,1} \otimes B_{1,j} \oplus A_{i,2} \otimes B_{2,j} \oplus \dots \oplus A_{i,n} \otimes B_{n,j} \quad (3)$$

$$C_{i,j} = A_{i,1} \otimes B_{1,j} + A_{i,2} \otimes B_{2,j} + \dots + A_{i,n} \otimes B_{n,j}, \quad (3')$$

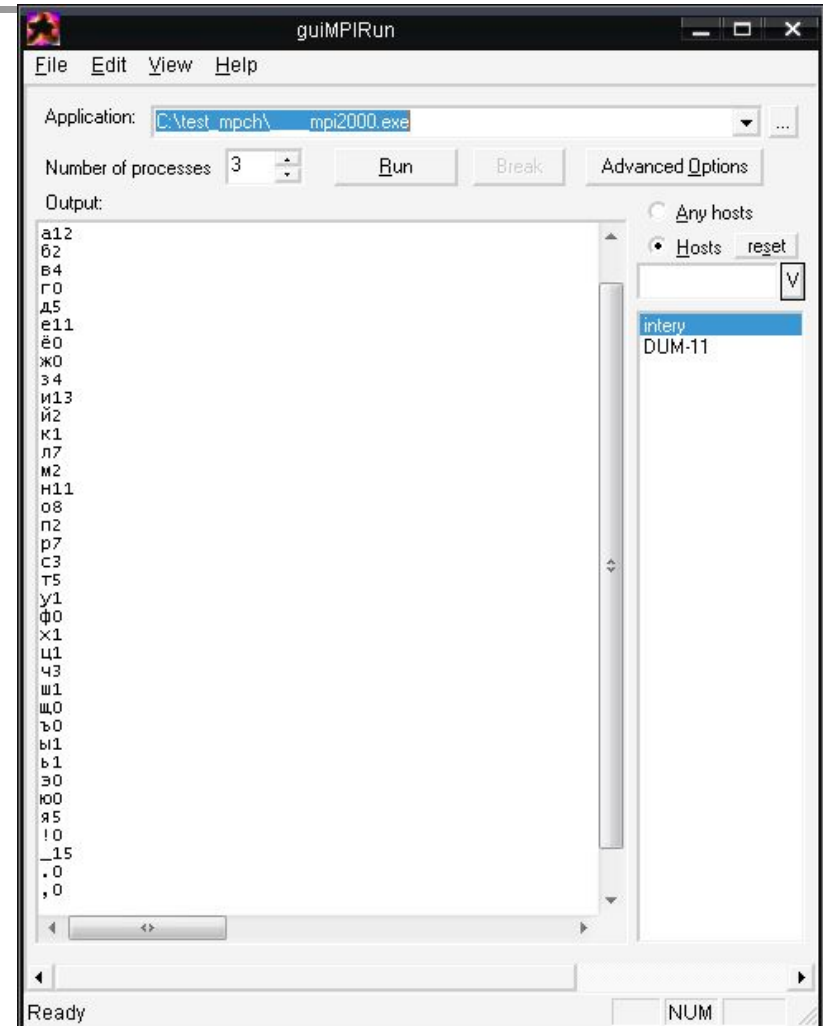
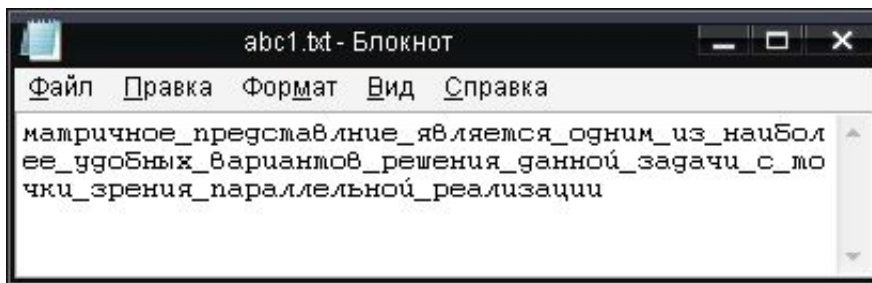
Определение частот встречаемости символов в сообщении

- Представим исходное сообщение, символы которого принадлежат множеству входного алфавита $S = \{s_1, s_2, \dots, s_N\}$, матрицей A размера $L \times K$. Пусть X – искомый вектор из N чисел, каждое из которых равно числу вхождений соответствующего элемента алфавита в исходное сообщение. Для нахождения его значений образуем новую матрицу B размера $K \times N$, каждая строка которой состоит из элементов алфавита S , так что $b_{i,1} = s_1, b_{i,2} = s_2, \dots, b_{i,N} = s_N$. Выполним умножение матриц $A \times B$, определив в нем операцию умножения компонент

$$a_{i,k} \otimes b_{k,j} = \begin{cases} 1, & a_{i,k} = b_{k,j}, \\ 0, & a_{i,k} \neq b_{k,j}. \end{cases}$$

- Каждая строка произведения $A \times B$ будет соответствовать числу вхождений соответствующего символа алфавита в строку матрицы исходного сообщения A . Свертка произведения по столбцам (сверху – вниз) позволит получить искомый вектор X . При представлении входной матрицы как вектора размера $1 \times K$ свертки не потребуется.

Использование матричных операций при построении дерева алгоритма Хаффмана



Упорядочивание узлов дерева

Рассмотрим возможность использования введенной операции матричного умножения для упорядочения элементов, составляющих вектор исходных значений A длины N . Назовем вектором упорядоченности C последовательность индексов, соответствующую расположению элементов A в порядке их возрастания. Для нахождения значений этого индексного вектора упорядоченности образуем новую матрицу B размера $N * N$, каждая строка которой состоит из элементов исходного вектора A . Выполним умножение матриц $A \times B$, определив в нем только операцию умножения компонент

$$a_{i,k} \otimes b_{k,j} = \begin{cases} 0, (a_{i,k} > b_{k,j}) \vee ((a_{i,k} = b_{k,j}) \wedge (i \leq j)), \\ 1, (a_{i,k} < b_{k,j}) \vee ((a_{i,k} = b_{k,j}) \wedge (i > j)) \end{cases} \quad (5)$$

Чтобы получить индексный вектор упорядоченности $C = [c_1, c_2, c_3, \dots, c_N]$ выполним умножение исходного вектора A на матрицу B , с учетом (5) и при арифметическом сложении:

$$C = A \times B, \text{ где}$$

$$B = \begin{bmatrix} A \\ A \\ A \\ A \\ A \\ A \end{bmatrix}$$

Добавление нового узла

- Для выбора двух минимальных узлов и добавления соответствующего им нового узла–родителя преобразуем вектор C , добавив в него незначащие разряды для всех пока не созданных вершин.
- Выполним над C две операции. Первая, матричная, заключается в создании для каждого нового узла вектора кода D длины $2 * N - 1$, разряды которого соответствуют полному множеству как исходных, так и новых узлов дерева. Вектор D содержит коды $1, 0$ в разрядах двух минимальных вершин и код 1 в разряде новой родительской вершины. Вторая операция состоит в добавлении к вектору A разряда для значения веса новой вершины, вычисления этого значения и удаления двух минимальных значений. Для нахождения значений D умножим вектор C на матрицу B , значение которой формируются разверткой C . При этом операцию умножения определим как

$$c_{i,k} \otimes b_{k,j} = \begin{cases} 1, ((c_{i,k} = 1) \vee (c_{i,k} = 2)) \wedge (k \geq j) \vee (k = R) \\ 0, ((c_{i,k} = 1) \vee (c_{i,k} = 2)) \wedge (k < j) \\ -, \neg(c_{i,k} = 1) \vee \neg(c_{i,k} = 2) \end{cases}$$

где R – номер добавляемой вершины.

- Операцию сложения $S_k \oplus S_{k+1} = c_{i,k} \otimes b_{k,j} \oplus c_{i,k+1} \otimes b_{k+1,j}$ определим в виде

$$S_k \oplus S_{k+1} = \begin{cases} S_{k+1}, (S_{k+1} = 1) \vee (S_{k+1} = 0) \wedge (S_k \neq 1), \\ \overline{S_k}, S_{k+1} = ' - '. \end{cases}$$

Формирование кодовых разрядов

- При добавлении очередной k -ой вершины разобьем сформированный вектор D на два: вектор Q соответствующий элементам исходного алфавита и вектор P , состоящий из элементов родительских разрядов.
- Пусть H – матрица кодов, столбцы которой – это векторы Q , каждый из которых соответствует добавленной вершине. Размер матрицы кодов равен $N * R$ где R – порядковый номер добавляемого узла-родителя. Тогда R -ый вектор-столбец матрицы кодов Хаффмана может быть получен умножением матрицы H на вектор P . При этом операции умножения и сложения определим следующим образом:

$$h_{i,k} \times p_{k,1} = \begin{cases} 1, (h_{i,k} \neq _') \wedge (p_{k,1} = 1) \wedge (k \neq R), \\ 0, (h_{i,k} \neq _') \wedge (p_{k,1} = 1) \wedge (k = R) \\ _, (h_{i,k} = _') \end{cases}$$

$$S_k \oplus S_{k+1} = \begin{cases} S_{k+1}, (S_{k+1} = 1) \vee (S_{k+1} = 0) \wedge (S_k \neq 1) \\ \overline{S_k}, S_{k+1} = _ \end{cases} \quad (8)$$



Суммарная оценка эффективности распараллеливания

Определение частот встречаемости символов в сообщении (общее
число сложений $\mathbb{N} * K = M$):

$$T_1(p) = \log_2(M).$$

Упорядочение узлов дерева:

$$T_2(p) = \log_2(N)$$

Добавление нового узла:

$$T_3(p) = \log_2(N)$$

Формирование кодовых разрядов:

$$T_4(p) = \log_2(N)$$

Замена символов сообщения кодами:

$$T_5(p) = \log_2(M)$$

Суммарная оценка эффективности распараллеливания:

$$T(p) = T_1(p) + (N - 1) * (T_2(p) + T_3(p) + T_4(p)) + T_5(p)$$

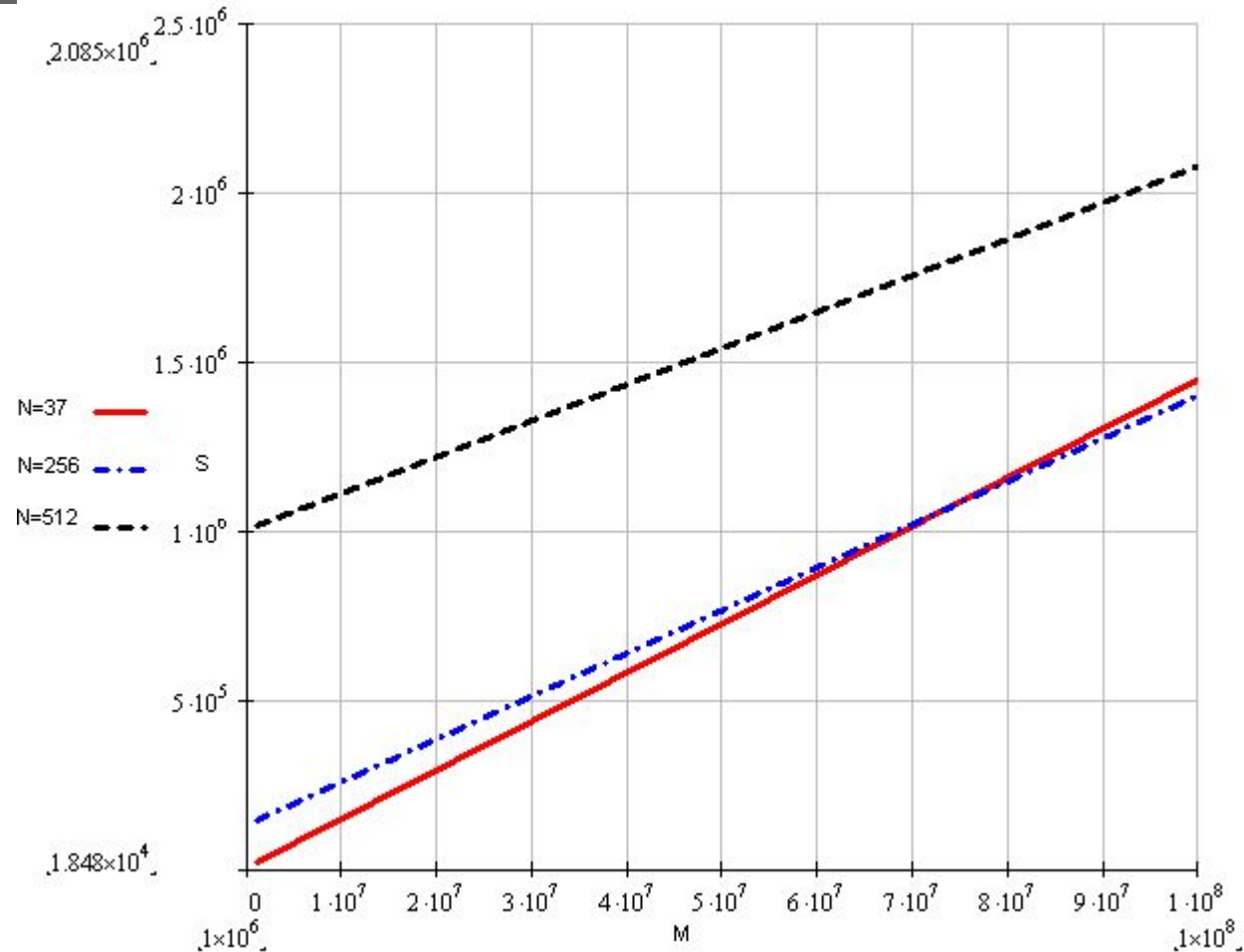
$$(9) \quad T(p) = 2 * \log_2(M) + 3 * \log_2(N)$$

Суммарная оценка эффективности распараллеливания

$$S_p(n) = \frac{T_1(n)}{T_p(n)}$$

$$S = \frac{M + N^3 / 2}{2 * \log_2(M) + 3 * \log_2(N)}$$

(10)



Пример

Пусть задано следующее множество элементов входного алфавита ($N=3$) и соответствующие им веса: а–5, б–3, в–7.

Упорядочим узлы:

$$C = [5 \ 3 \ 7] \otimes \begin{bmatrix} 5 & 3 & 7 \\ 5 & 3 & 7 \\ 5 & 3 & 7 \end{bmatrix} = [2 \ 1 \ 3]$$

где

$$C_{1,1} = 1 + 1 + 0 = 2$$

$$C_{1,2} = 0 + 1 + 0 = 1$$

$$C_{1,3} = 1 + 1 + 1 = 3$$

Добавления нового узла:

$$R = 1;$$

$$\begin{matrix} v_1 & v_2 & a & б & в \\ [\quad - & 2 & 1 & 3] \end{matrix} \otimes \begin{bmatrix} - & - & 2 & 1 & 3 \\ - & - & 2 & 1 & 3 \\ - & - & 2 & 1 & 3 \\ - & - & 2 & 1 & 3 \\ - & - & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix};$$

$$R = 2;$$

$$\begin{matrix} v_1 & v_2 & a & б & в \\ [2 & - & - & - & 1] \end{matrix} \otimes \begin{bmatrix} 2 & - & - & - & 1 \\ 2 & - & - & - & 1 \\ 2 & - & - & - & 1 \\ 2 & - & - & - & 1 \\ 2 & - & - & - & 1 \end{bmatrix}.$$

	v_1			v_2		
	A	C	D	A	C	D
v_1			1	8	2	1
v_2						1
a	5	2	1			
б	3	1	0			
в	7	3		7	1	0

Пример

Формируем кодовые разряды:

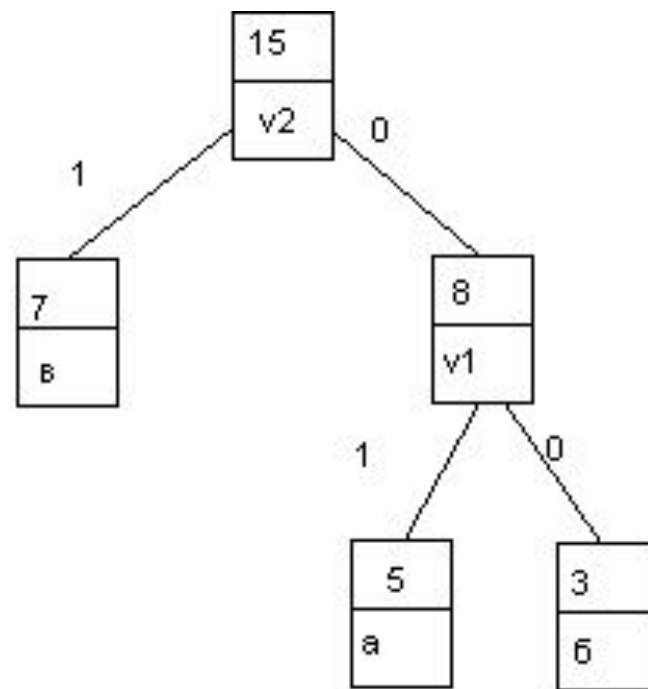
$$R = 2$$

$v_1 \ v_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & - \\ 0 & - \\ - & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \oplus - & - \\ 1 \oplus - & - \\ - \oplus 1 & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Получили итоговую матрицу:

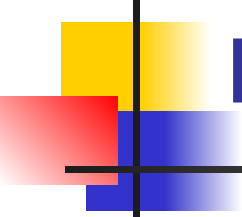
$$\begin{matrix} a \\ б \\ в \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ - & 1 \end{bmatrix}.$$



$$M=3, N=37 :$$

$$S = \frac{M + N^3 / 2}{2 * \log_2(M) + 3 * \log_2(N)} = \frac{25329,5}{18,79829} = 1347,437$$

Список используемых источников



- 1 Алексеев Е. Р. Учимся программировать на Microsoft Visual C++ и Turbo C++ Explorer / Е. Р. Алексеев, под ред. О. В. Чесноковой. – М. : ИТ Пресс, 2007 –352 с.
- 2 Антонов А. С. Параллельное программирование с использованием технологии MPI: учебное пособие / А. С. Антонов. – М. : МГУ, 2004. –71 с.
- 3 Ахо А. Построение и анализ вычислительных алгоритмов / А. Ахо, Дж. Хопкрофт, Дж. Ульман. – М. : Мир, 1979. – С. 255-283
- 4 Гергель В. П. Теория и практика параллельных вычислений / В. П. Гергель. – М. : Бинوم. Лаборатория знаний , 2007. – 424 с.
- 5 История развития теории сжатия информации [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://compression.ru>
- 6 Новиков Ф. А. Дискретная математика для программистов: учебник для вузов. 2-е изд. / Ф. А. Новиков. – СПб. : Питер, 2005. – С. 171-215
- 7 Самойлов М. Ю. Использование матричных операций при построении дерева Хаффмана / М. Ю.Самойлов, Т. А. Самойлова. – Смоленск: СГМА Математическая морфология. Электронный математический и медико-биологический журнал. Русская версия 2.0. –Том 2. – Вып.2, 1997. – 246 с.
- 8 Хокни Р. Параллельные ЭВМ / Р. Хокни, К. Джессхоуп. – М. : Радио и связь, 1986. – С. 253-255, 264-269