

# Первообразная и интеграл



| Функция                         | Первообразные                     |
|---------------------------------|-----------------------------------|
| $x^p, p \neq -1$                | $\frac{x^{p+1}}{p+1} + C$         |
| $\sin x$                        | $-\cos x + C$                     |
| $\cos x$                        | $\sin x + C$                      |
| $(kx+b)^p, p \neq -1, k \neq 0$ | $\frac{(kx+b)^{p+1}}{k(p+1)} + C$ |
| $\sin (kx+b), k \neq 0$         | $-\frac{1}{k} \cos (kx+b) + C$    |
| $\cos (kx+b), k \neq 0$         | $\frac{1}{k} \sin (kx+b) + C$     |



# Примеры применения этих формул

| Функция                  | Первообразная                           |
|--------------------------|-----------------------------------------|
| $(3x - 1)^{\frac{1}{2}}$ | $\frac{2}{9}(3x - 1)^{\frac{3}{2}} + C$ |
|                          |                                         |
| $\sin (5x + 2)$          | $-\frac{1}{5} \cos (5x + 2) + C$        |
| $\cos (5x + 2)$          | $\frac{1}{5} \sin (5x + 2) + C$         |



# Найти первообразную функций

1)  $f(x) = x^4$

2)  $f(x) = x^5 + x^7$

3)  $f(x) = 3x^2 + x$

4)  $f(x) = x + 5x^3 + 5$

5)  $f(x) = 4 + \sin x$



# Найти первообразную функций

$$1) f(x) = x^4$$

$$2) f(x) = x^5 + x^7$$

$$3) f(x) = 3x^2 + x$$

$$4) f(x) = x + 5x^3 + 5$$

$$5) f(x) = 4 + \sin x$$

$$1) F(x) = \frac{x^5}{5}$$

$$2) F(x) = \frac{x^6}{6} + \frac{x^8}{8}$$

$$3) F(x) = x^3 + \frac{x^2}{2}$$

$$4) F(x) = \frac{x^2}{2} + 5 * \frac{x^4}{4} + 5x$$

$$5) F(x) = 4x + \cos x$$



**1**

Определите, является ли функция  $F$  первообразной для функции  $f$  на  $\mathbb{R}$ , если:

$$\begin{aligned} F(x) &= 2x^4 + \cos^2 x - 3, \\ f(x) &= 8x^3 + \sin 2x - 3x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(x) &= 3x^5 - \sin^2 x + 2, \\ f(x) &= 15x^4 - \sin 2x. \end{aligned}$$

**2**

Найдите общий вид первообразных для функций:

$$\begin{aligned} \text{а) } f(x) &= \frac{4}{x^5} - (1 - 2x)^3; \\ \text{б) } f(x) &= x + \frac{2}{\cos^2 x} - 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{а) } f(x) &= (3x + 2)^4 - \frac{1}{x^6}; \\ \text{б) } f(x) &= 2x - \frac{3}{\sin^2 x} + 6. \end{aligned}$$

**3**

Для функции  $f(x)$  найдите первообразную, график которой проходит через точку  $A$ , если:

$$\begin{aligned} \text{а) } f(x) &= \frac{2}{\sqrt{x+2}} + 3x^2, \\ &A(-1; 0); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } f(x) &= \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x - 2 \cos \frac{x}{2}, \\ &A(2\pi; 2\pi). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{а) } f(x) &= 4x^3 - \frac{1}{2\sqrt{x-1}}, \\ &A(2; 0); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } f(x) &= \sin^2 x + \cos^2 x + \\ &+ \frac{1}{3} \sin 3x, \quad A\left(\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right). \end{aligned}$$



# Неопределенный интеграл

- Совокупность всех первообразных данной функции  $f(x)$  называется ее неопределенным интегралом и обозначается  $\int f(x)dx$ .

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

где  $C$  - произвольная постоянная.

- Пример:  $\int xdx = \frac{x^2}{2} + C$

Так как первообразной для функции  $f(x)=x$  на всей числовой оси является  $F(x)=x^2/2$ , поскольку  $(x^2/2)'=x$ .



# Правила интегрирования

$$\int cf(x)dx = c \int f(x)dx, c = \text{const}$$

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

$$\int f(ax + b)dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + C, a \neq 0$$





# ***Свойства интеграла, вытекающие из определения***

Производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции, а его дифференциал- подынтегральному выражению. Действительно:

$$1. (\int f(x) dx)' = (F(x) + C)' = F'(x) = f(x);$$

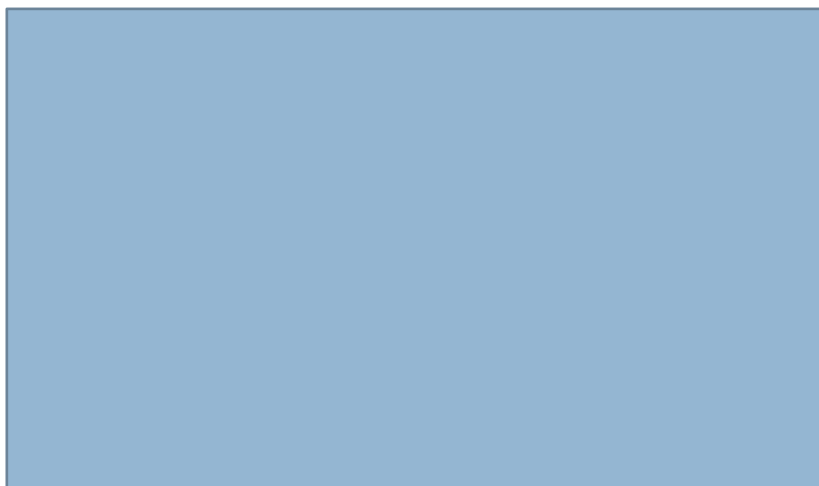
$$2. d \int f(x) dx = (\int f(x) dx)' dx = f(x) dx.$$



# Таблица неопределенных интегралов

**1.**  $\int dx = x + C .$

**2.**  $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, (a \neq -1) .$



**6.**  $\int \sin x dx = -\cos x + C .$

**7.**  $\int \cos x dx = \sin x + C .$

**8.**  $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctgx} + C .$

**9.**  $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tgx} + C .$

**10.**  $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctgx} + C .$



## Таблица неопределенных интегралов

11.  $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C .$

12.  $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C .$

13.  $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C ..$



## Примеры

**Пример1 .** Вычислить  $\int \cos 5x dx$  .

**Решение.** В таблице интегралов найдем  
 $\int \cos x dx = \sin x + C$  .

Преобразуем данный интеграл к табличному,  
воспользовавшись тем, что  $d(ax) = a dx$  .

Тогда:

$$\begin{aligned}\int \cos 5x dx &= \int \cos 5x \frac{d(5x)}{5} = \frac{1}{5} \int \cos 5x d(5x) = \\ &= \frac{1}{5} \sin 5x + C .\end{aligned}$$



## ***Примеры***

**Пример 2.** Вычислить  $\int (x^2 + 3x^3 + x + 1)dx$ .

**Решение.** Так как под знаком интеграла находится сумма четырех слагаемых, то раскладываем интеграл на сумму четырех интегралов:

$$\begin{aligned}\int (x^2 + 3x^3 + x + 1)dx &= \int x^2 dx + 3 \int x^3 dx + \int x dx + \int dx = \\ &= \frac{x^3}{3} + 3 \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + x + C\end{aligned}$$



**1**

Найдите функцию  $f$ , для которой функция  $F$  является одной из первообразных на  $R$ , если:

$$F(x) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) - \operatorname{arccotg} x + 2x.$$

$$F(x) = \sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{4}\right) + \operatorname{arctg} x - 3x^2.$$

**2**

Найдите неопределенный интеграл:

а)  $\int \left( \frac{8}{\sin^2 x} + 6 \cos^2 \frac{x}{6} \right) dx;$

б)  $\int \left( 3 - \frac{2}{(2x+5)^2} \right) dx.$

а)  $\int \left( \frac{8}{\cos^2 x} - 8 \sin^2 2x \right) dx;$

б)  $\int \left( \frac{6}{(3x-1)^3} - 5 \right) dx.$

**3**

Для функции  $f(x)$  найдите первообразную, график которой проходит через точку  $A$ , если:

а)  $f(x) = \frac{2}{\sqrt{5-2x}} + 4x, \quad A(2; 6);$

а)  $f(x) = 6x^2 - \frac{1}{6\sqrt{2-\frac{x}{3}}},$   
 $A(3; 55)$

б)  $f(x) = \sin x \sin 5x,$   
 $A\left(\frac{\pi}{4}; \frac{1}{24}\right).$

б)  $f(x) = \cos x \cos 5x,$   
 $A\left(-\frac{\pi}{4}; \frac{1}{24}\right).$

