

Определение производной

Задача о вычислении мгновенной скорости

$s(t) = 4t^2$ - закон движения материальной точки по прямой

s - путь, пройденный за время t ($t \geq 0$)

Вычислим v_{cp} - среднюю скорость точки за промежуток времени от $t_1 = 2$ до $t_2 = 5$

$$s(2) = 4 \cdot 2^2 = 16; \quad s(5) = 4 \cdot 5^2 = 100;$$

$$s(5) - s(2) = 100 - 16 = 84; \quad t_2 - t_1 = 5 - 2.$$

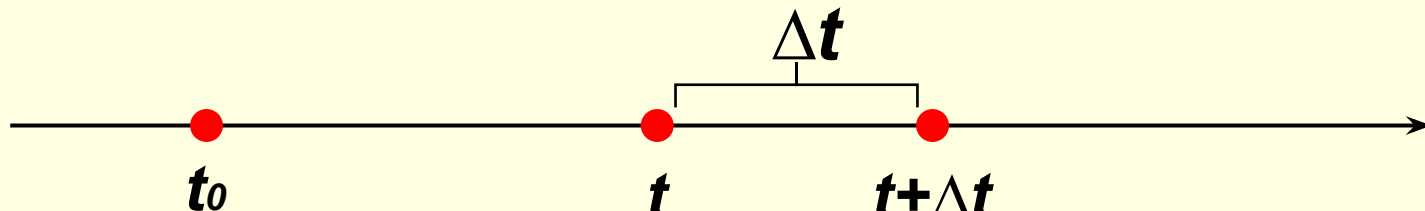
$$v_{cp} = \frac{s(5) - s(2)}{5 - 2} = \frac{84}{3} = 28.$$

- Пусть точка движется вдоль прямой по закону $S(t)$.

Тогда за промежуток времени t точка проходит расстояние $S(t)$.

Пусть Δt – малый промежуток времени.
Путь, пройденный за время $t + \Delta t$, равен $S(t + \Delta t)$.

Тогда средняя скорость



The diagram shows a horizontal axis with an arrow pointing to the right. Three red dots are marked on the axis at positions labeled t_0 , t , and $t + \Delta t$ from left to right. A horizontal bracket is drawn above the axis between the dots at t and $t + \Delta t$, with the label Δt centered above it.

$$v_{cp.} = \frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{\Delta t}$$

Задача о вычислении мгновенной скорости

$$s(t) = 4t^2$$

Вычислим v_{cp}

за промежуток времени от t до $t + \Delta t$

$$s(t) = 4t^2; \quad s(t + \Delta t) = 4(t + \Delta t)^2;$$

$\Delta s = s(t + \Delta t) - s(t)$ – *путь, пройденный точкой за промежуток времени от t до $t + \Delta t$*

$$\Delta s = 4(t + \Delta t)^2 - 4t^2 = (8t + 4\Delta t)\Delta t;$$

$$v_{cp} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{(8t + 4\Delta t)\Delta t}{\Delta t} = 8t + 4\Delta t.$$

Общий случай:

точка движется по прямой по закону $s(t) = f(t)$

*Тогда её ~~мгновенной скоростью v~~ в момент времени t называют **предел** (если он существует), к которому стремится её средняя скорость на промежутке времени $[t; t + \Delta t]$ при $\Delta t \rightarrow 0$:*

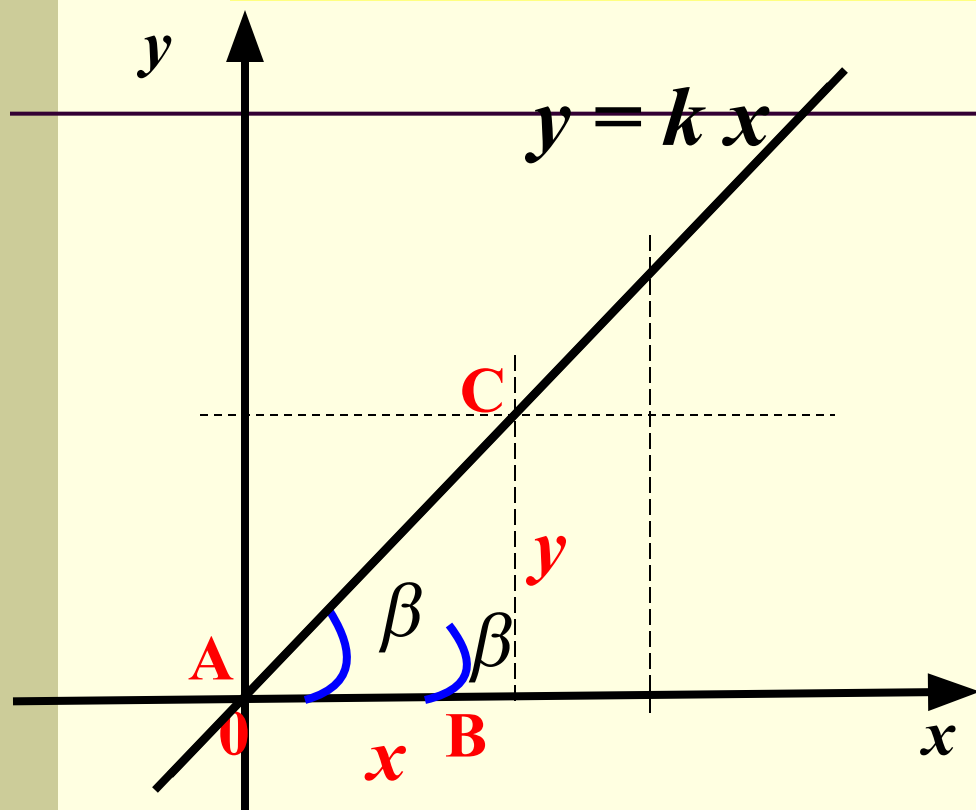
$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_{\text{ср}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta t}.$$

Величина Δt – приращение времени

Величина $\Delta f = f(t + \Delta t) - f(t)$ - приращение пути

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta t}.$$

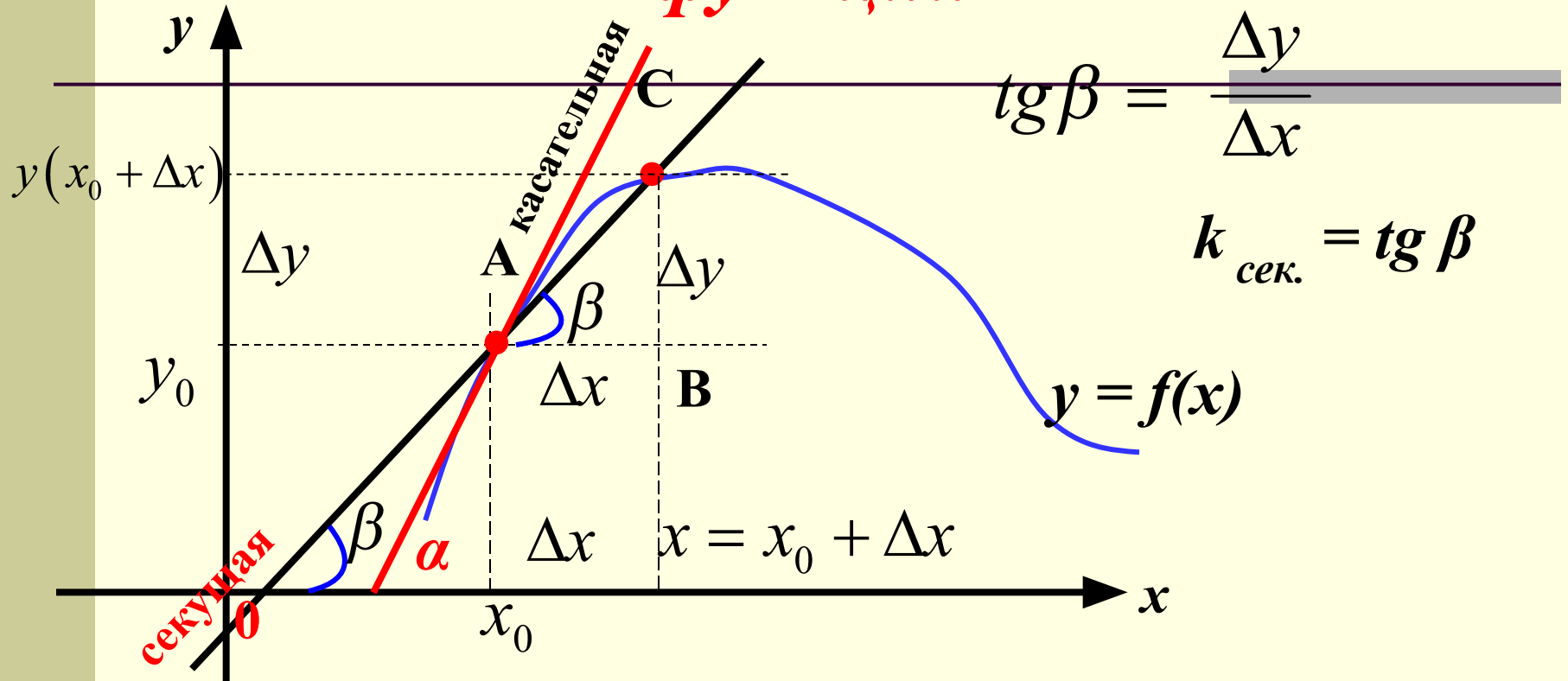
Повторение: вычисление тангенса угла наклона прямой к оси Ox



$$k = \frac{y}{x}$$
$$\operatorname{tg} \beta = \frac{BC}{AB} = \frac{y}{x}$$
$$\operatorname{tg} \beta = k$$

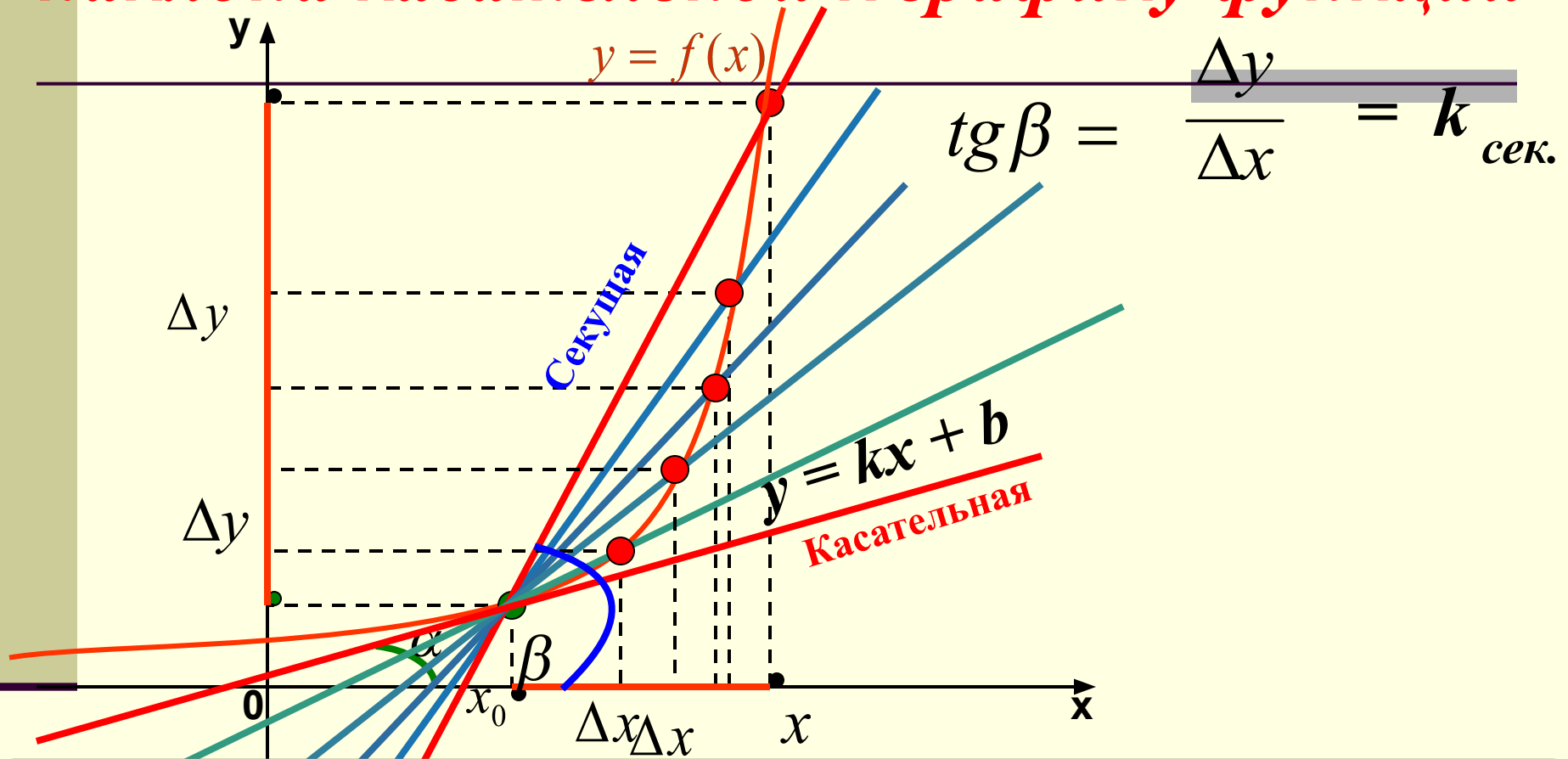
Очевидно – при параллельном переносе прямой, тангенс угла наклона остаётся равен угловому коэффициенту прямой

Дадим определение касательной к графику функции



Касательной к графику функции $f(x)$ в точке $A(x; f(x))$ называется прямая, представляющая предельное положение секущей AC , (если оно существует) когда точка C стремится к точке A .

Задача о вычислении тангенса угла наклона касательной к графику функции



$$k_{\text{кас.}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} k_{\text{сек.}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \text{tg } \beta = \text{tg } \alpha$$

**Задача о
вычислении
мгновенной
скорости**

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta t}.$$

**Задача о вычислении
тангенса угла наклона
касательной к графику
функции**

$$\operatorname{tg} \alpha = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = k_{\text{кас.}}$$

В каждой из задач надо было найти предел отношения приращения функции к приращению аргумента, при условии, что приращение аргумента стремится к нулю

Историческая справка

Тайны планетных орбит.

Древнегреческие учёные умели решать немногие задачи кинематики – рассчитать либо равномерное прямолинейное движение, либо равномерное вращение вокруг оси.

А планеты на небосводе двигались по самым замысловатым кривым . Свести эти движения планет к простым древним учёным не удавалось.

Лишь в 17 веке немецкому учёному Иоганну Кеплеру удалось сформулировать законы движения планет. Оказалось, что планеты движутся по эллипсам, и притом неравномерно. Объяснить, почему это так, Кеплер не смог.

В конце 17 века Исаак Ньютон открыл законы динамики, сформулировал закон всемирного тяготения и развил математические методы, позволявшие сводить неравномерное к равномерному, неоднородное к однородному, криволинейное к прямолинейному.

В основе лежала простая идея – движение любого тела за малый промежуток времени можно приближённо рассматривать как прямолинейное и равномерное.

Одновременно с Ньютоном немецкий философ и математик Готфрид Вильгельм Лейбниц изучал, как проводить касательные к произвольным кривым.

Он также развил новое исчисление, которое оказалось по сути дела тождественным построенному Ньютоном. Обозначения, введённые Лейбницем, оказались настолько удачными, что сохранились и по сей день.

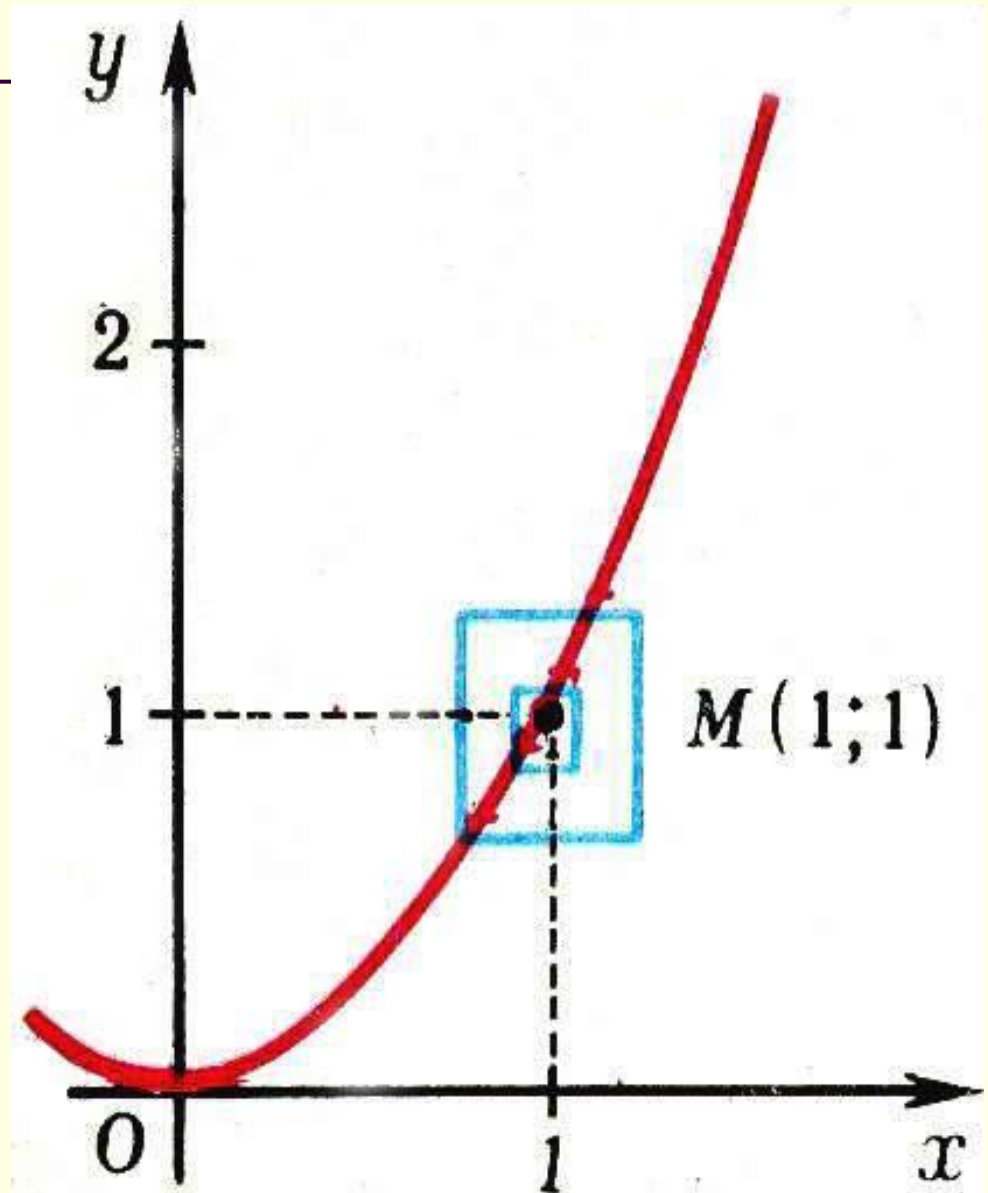
Новая математика Ньютона и Лейбница состояла из двух больших частей – дифференциального и интегрального исчислений.

В первом из них говорилось, как, изучая малую часть явления, сводить неравномерное к равномерному.

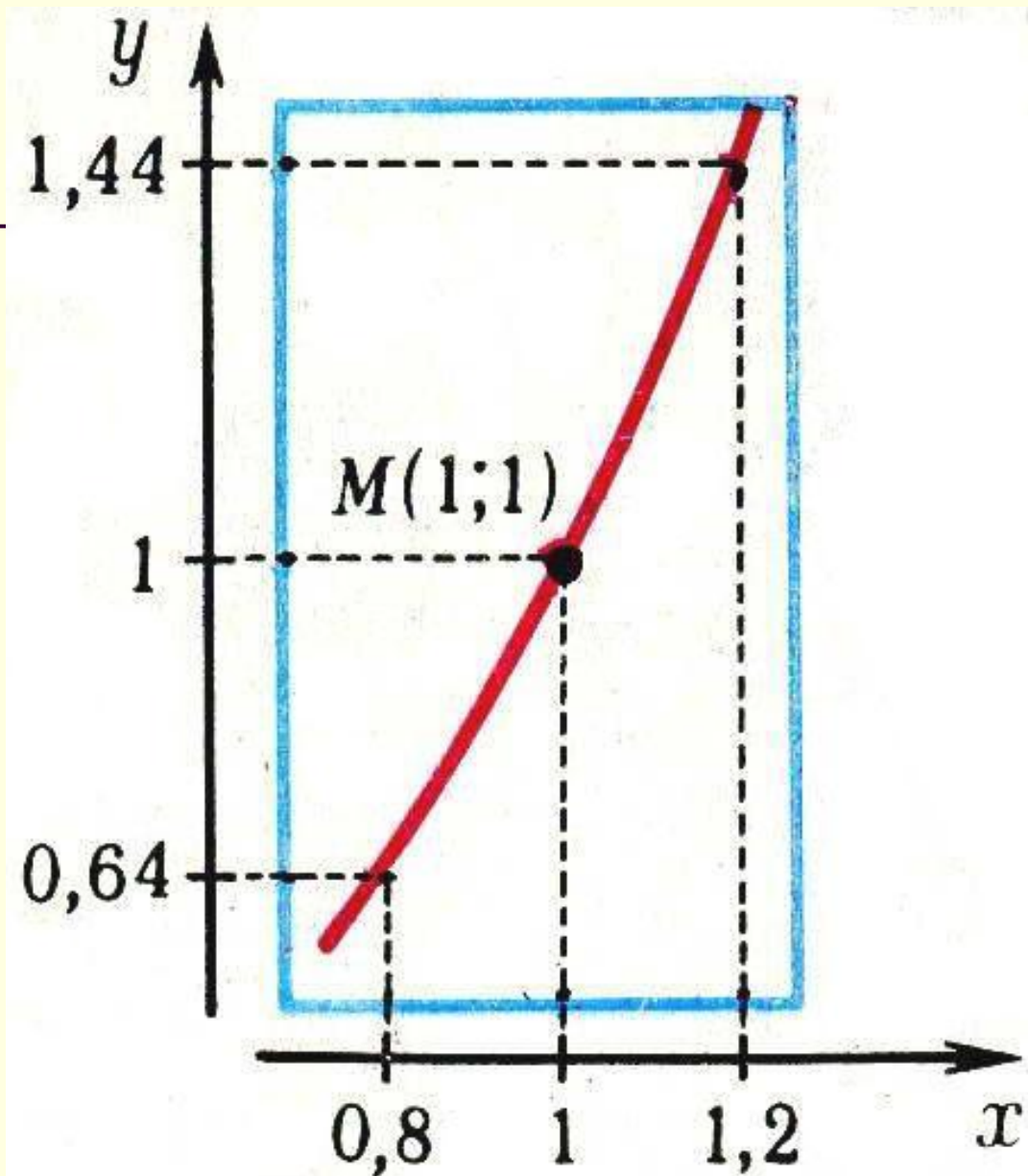
Во второй – как из малых равномерных частей конструировать сложное неравномерное явление.

Итак, идём по стопам Ньютона и Лейбница!

Рассмотрим график функции $y = x^2$ вблизи точки $M(1;1)$, изображённый в разных масштабах.

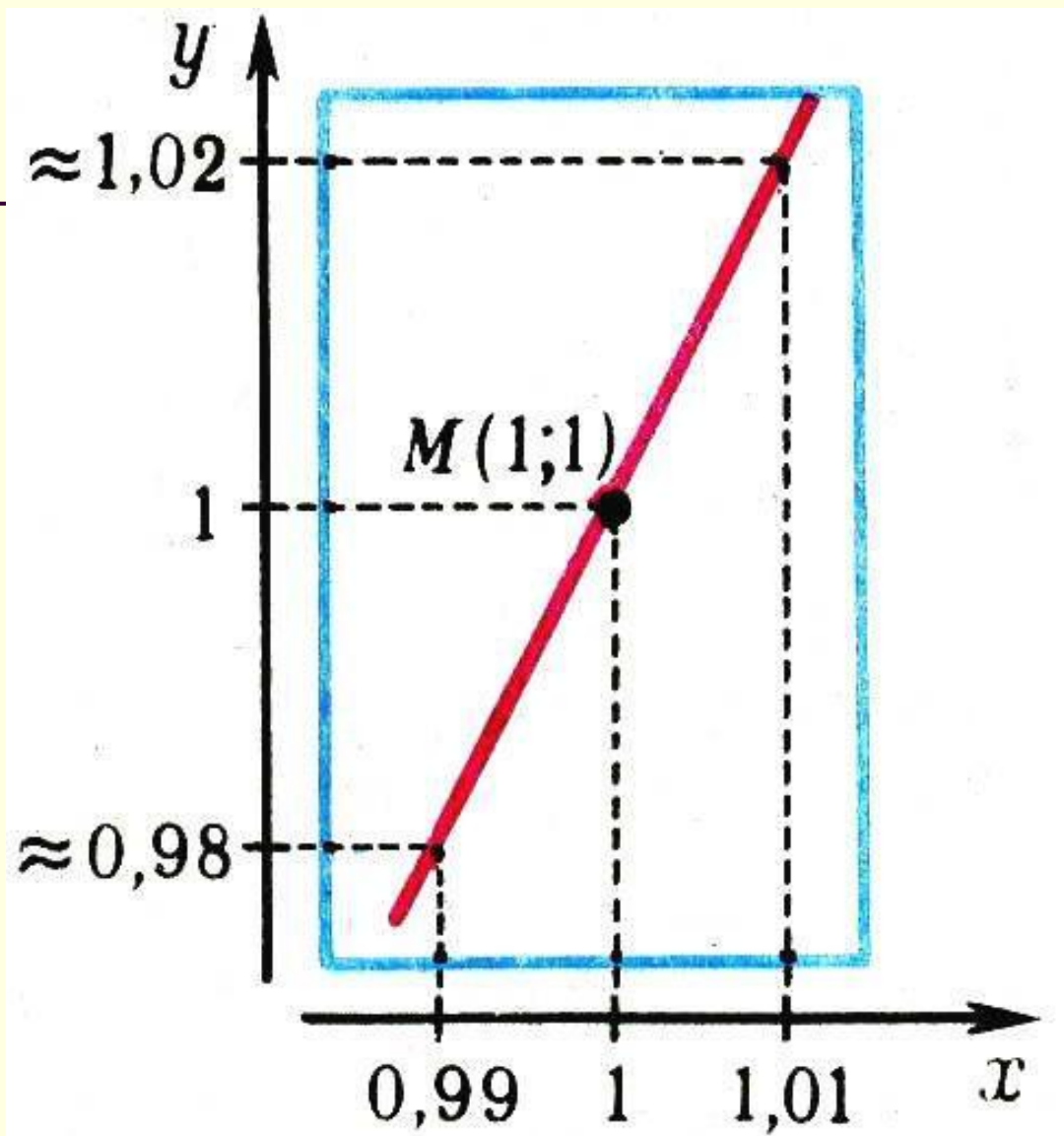


Как изменилась
конфигурация
графика?



*Определите радиус
окрестности
точки $x = 1$*

*Как изменилась
конфигурация
графика?*



ОСНОВНЫЕ ВЫВОДЫ

- 1. Чем крупнее масштаб, тем меньше график функции будет отличаться от некоторой прямой, проходящей через точку $M(1;1)$.**
- 2. То же самое будет происходить с графиком функции вблизи любой другой точки.**
- 3. Этим свойством обладают и многие другие кривые: окружность, гипербола, синусоида и т. д.**

**Такое свойство функций называют
«линейность в малом»**

- Очевидно, если $\Delta t \longrightarrow 0$, то $V_{\text{ср.}} \longrightarrow V_{\text{мгн.}}$

Значит,

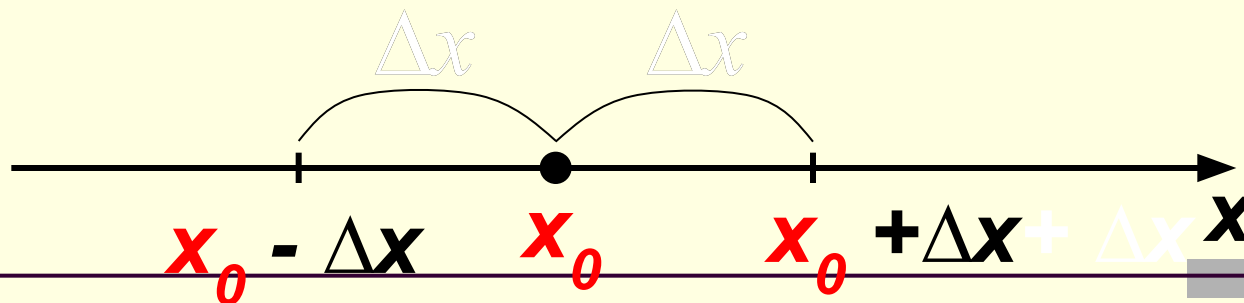
$$v_{\text{мгн.}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{\Delta t}$$

или

$$v_{\text{мгн.}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t},$$

где Δt – приращение времени

ΔS - приращение пути.



Изменим x_0 на величину Δx .

Δx - называется приращением аргумента.

x – новое значение аргумента

Величина $y(x) - y(x_0)$
называется приращением функции
в точке x_0 и обозначается $\Delta y(x_0)$.

$$\Delta y(x_0) = y(x_0 + \Delta x) - y(x_0)$$

Таким образом, чтобы вычислить приращение функции $f(x)$ при переходе от точки x_0 к точке $x = x_0 + \Delta x$, нужно:

1. найти значение функции $f(x_0)$;
2. найти значение функции $f(x_0 + \Delta x)$
3. найти разность $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$

В математике операция нахождения предела отношения приращения функции Δf к приращению аргумента Δx , при условии, что приращение $\Delta x \rightarrow 0$ называется -

дифференцирование функции

Результат выполнения называют

производной и обозначают:

$f'(x)$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

Определение производной

Производной функции в точке x называется предел отношения приращения функции в этой точке (Δf) к соответствующему приращению аргумента (Δx) , когда приращение аргумента стремится к нулю

Определение производной

Производной функции $f(x)$ в точке x_0
называется **ЧИСЛО**, к которому стремится
отношение $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ при $\Delta x \rightarrow 0$.

Чтобы найти производную функции в точке, надо:

1. найти приращение функции в точке X_0 ;
2. найти отношение приращения функции к приращению аргумента;
3. вычислить предел полученного отношения при условии, что приращение аргумента стремится к нулю.

Пример нахождения производной

Дано: $f(x) = x^2 + 1$.

Решение

Найти $f'(x)$.

$$\Delta f(x) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \quad f(x_0) = 0^2 + 1$$

$$f(x_0 + \Delta x) = (0 + \Delta)^2 + 1 = x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 + 1$$

$$\Delta f(x) = x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 + 1 - (x_0^2 + 1) =$$

$$= \cancel{x_0^2} + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 + \cancel{1} - \cancel{x_0^2} - \cancel{1} = \Delta x(2x_0 + \Delta x)$$

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{\cancel{\Delta x}(2x_0 + \Delta x)}{\cancel{\Delta x}} = 2x_0 + \Delta x$$

$$\text{Если } \Delta x \rightarrow 0, \text{ то } \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x \rightarrow 2x_0$$

Значит, $f'(x) = 2x$.

Механический смысл производной

$$v_{мг.}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

Механический смысл производной состоит в том, что производная пути по времени равна мгновенной скорости в момент времени t_0 :

$$S'(t) = V_{мг.}(t)$$

Геометрический смысл производной.

*Производная функции в точке x_0 равна
угловому коэффициенту касательной к
графику функции $y = f(x)$ в этой точке.*

$$f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha = k$$